Quasikonvexe Relaxation mehrdimensionaler Steuerungsprobleme mit Integranden $f(t, \xi, v)$

Marcus Wagner

Reihe Mathematik
M-06/2008

Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Fakultät 1, Mathematisches Institut
Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus

Quasikonvexe Relaxation mehrdimensionaler Steuerungsprobleme mit Integranden $f(t, \xi, v)$

Marcus Wagner

1. Einleitung.

a) Dieudonné-Rashevsky-Probleme mit nichtkonvexen Integranden.

Die vorliegende Arbeit ist der Existenztheorie mehrdimensionaler Steuerungsprobleme mit nichtkonvexen Integranden $f(t, \xi, v)$ gewidmet, die nicht allein von v, sondern auch explizit von t und ξ abhängen, während der Steuerbereich als konvex vorausgesetzt wird. Genauer betrachten wir Aufgaben der Gestalt

$$\text{(P)} \quad F(x) = \int_\Omega f(t, x(t), Jx(t))\, dt \longrightarrow \inf\!\,; \quad x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,; \tag{1.1}$$

$$Jx(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m}(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm} \ \ (\forall)\, t \in \Omega\,. \tag{1.2}$$

Darin wählen wir $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ als Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes mit $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\Omega)$ und einen Steuerbereich $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ als konvexen Körper mit $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$. Der Integrand $f(t, \xi, v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ ist im allgemeinen nicht mehr konvex in v. Die Struktur von (P) als Steuerungsproblem wird ersichtlich, indem man formal $Jx(t) = u(t)$ mit Steuervariablen $u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ ansetzt.

Derartige Aufgaben, auch als Dieudonné-Rashevsky-Probleme bezeichnet, treten beispielsweise in der Elastizitätstheorie,[01)] in der Populationsdynamik[02)] und der mathematischen Bildverarbeitung auf.[03)] Die Notwendigkeit, nichtkonvexe Integranden zu betrachten, wird durch verschiedene konkrete Aufgabenstellungen der Bildverarbeitung motiviert: das image-registration-Problem mit polykonvexen Regularisierungstermen,[04)] die Bestimmung des optischen Flusses mit einem Perona-Malik-Regularisierungsterm[05)] und die vom Verfasser vorgeschlagene Steuerungsformulierung des Shape-from-Shading-Problems im Mehrbildverfahren.[06)] In allen drei Fällen ist $n = m = 2$, so daß die Steuerungsprobleme in Analogie zur mehrdimensionalen Variationsrechnung nicht mehr konvex, sondern quasikonvex relaxiert werden müssen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Variations- und Steuerungsproblem ergibt sich aus dem Umstand, daß der Integrand in (P) a priori nur für $v \in \mathrm{K}$ erklärt ist. Die Beispiele aus [Wagner 06a], pp. 16 ff., und [Wagner 06b], p. 241 f., zeigen, daß der Minimalwert von (P) bei der Relaxation im allgemeinen nur dann erhalten bleibt, wenn man den Integranden auf $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ in "bestmöglicher Weise", d.h. mit

---

01) [Ting 69a], p. 531 f., [Ting 69b] und [Wagner 96], pp. 76 ff.

02) [Brokate 85], [Feichtinger/Tragler/Veliov 03].

03) [Brune/Maurer/Wagner 08], [Franek/Franek/Maurer/Wagner 08], [Wagner 06a], pp. 108 ff., und [Wagner 07a].

04) Siehe die Literaturhinweise in Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit, wo diese Aufgabe ausführlich behandelt wird.

05) Vergleiche [Aubert/Kornprobst 06], pp. 90 – 93, und [Wagner 06a], p. 114. In [Hinterberger/Scherzer/Schnörr/Weickert 02], p. 82, wird stattdessen die Anwendung eines polykonvexen Regularisierungsterms vorgeschlagen.

06) [Wagner 07a], pp. 19 ff.

$(+\infty)$ fortsetzt. Die Folge ist, daß der Funktionswert $(+\infty)$ auch bei den zur Hüllenbildung verwendeten quasikonvexen Funktionen zugelassen werden muß. Wir wollen daher folgende Klassen von Integranden definieren:

Definition 1.1.: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *sei Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes und* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *ein konvexer Körper mit* $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$.

1) **(Funktionenklasse $\mathcal{F}_{\mathrm{K}}$):** *Eine Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ *gehört zur Klasse* $\mathcal{F}_{\mathrm{K}}$*, falls die Einschränkung* $f \,\big|\, \mathrm{K}$ *zu* $C^0(\mathrm{K}, \mathbb{R})$ *gehört und* $f \,\big|\, (\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}) \equiv (+\infty)$ *gilt.*

2) **(Funktionenklasse $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$):** *Eine Funktion* $f(t,\xi,v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ *gehört zur Funktionenklasse* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$*, wenn mit einer* m*-dimensionalen Lebesgueschen Nullmenge* $\mathrm{N} \subset \Omega$ *gilt:*

a) $f(t,\xi,v) = (+\infty)$ *für alle* $(t,\xi,v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n \times \big(\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}\big)$,

b) $f(t,\xi,v) < (+\infty)$ *für alle* $(t,\xi,v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}$,

c) die Einschränkung $f \,\big|\, \big(\big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}\big)$ *ist bezüglich* t *Borel-meßbar und bezüglich* (ξ, v) *stetig,*

d) f *erfüllt eine Wachstumsbedingung* [07)]

$$\big|\, f(t,\xi,v) \,\big| \leqslant A(t) + B(\xi,v) \quad \forall\, (t,\xi,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}\,, \tag{1.3}$$

worin $A \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$*,* $A \,\big|\, \operatorname{int}(\Omega)$ *stetig und* B *auf jeder beschränkten Teilmenge von* $\mathbb{R}^n \times \mathrm{K}$ *beschränkt ist.*

Für den Spezialfall, daß der Integrand in (P) bzw. seine Fortsetzung auf den Gesamtraum $\mathbb{R}^{nm}$ zu $\mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ gehört (und damit nur von v abhängt), wurde in [Wagner 07b] bereits ein Relaxationssatz bewiesen (unten als Satz 1.3., 2) zitiert). Die passende Hüllfunktion für den Integranden ist die sog. unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion (siehe Definition 2.6. unten). Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Verallgemeinerung dieses Resultats auf Dieudonné-Rashevsky-Probleme mit Integranden $f \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$. Dabei stellt sich heraus, daß die aus der mehrdimensionalen Variationsrechnung bekannte Beweismethode der Rückführung auf den Spezialfall $f = f(v)$ [08)] auf Steuerungsprobleme (P) übertragen werden kann.

b) Relaxation von (P) durch Ersetzung des Integranden; Hauptergebnis.

Relaxation bedeutet, zu einer gegebenen Variations- oder Steuerungsaufgabe eine neue Aufgabe zu finden, deren Minimalwert mit dem bisherigen übereinstimmt, deren zulässiger Bereich den ursprünglichen umfaßt (eventuell im Sinne einer Einbettung), und deren Zielfunktional in einer geeigneten Topologie unterhalbstetig ist. [09)] Indem man in der relaxierten Aufgabe die Existenz globaler Minimalstellen sichert, wird gleichzeitig ihre numerische Behandlung mit direkten Methoden gerechtfertigt. [10)] In der vorliegenden Arbeit wollen wir zur Relaxation von (P) den Integranden f im Zielfunktional durch eine passende Hüllfunktion ersetzen. [11)] An diese Funktion müssen folgende Bedingungen gestellt werden:

Satz 1.2. (Relaxation von (P)): *Wir betrachten die Aufgabe* (P) *unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 1.a). Gegeben sei eine Funktion* $f^{\#}(t,\xi,v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

---

07) Vergleiche [Acerbi/Fusco 84], p. 132, Theorem [II.1], (II.4), und p. 134. Die Stetigkeit der Majorantenfunktion A wird später benötigt, um die Offenheit ihrer Niveaumengen zu sichern; siehe Beweis zu Satz 3.3., Schritt 1.

08) [Dacorogna 08], pp. 377 ff.

09) Vergleiche z. B. [Buttazzo 89], pp. 2 ff. und pp. 16 ff., [Roubíček 97], pp. vii ff.

10) Siehe [Morrey 66], pp. 15 ff., und [Dacorogna 08], pp. 3 ff.

11) Zur Relaxation von (P) mittels Einführung verallgemeinerter Steuerungen ("Youngscher Maße") vergleiche man [Wagner 08].

a) Es gibt eine m-dimensionale Lebesguesche Nullmenge $\mathrm{N} \subset \Omega$, so daß für alle $(\hat{t}, \hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ gilt: Der effektive Definitionsbereich der Funktion $f^{\#}(\hat{t}, \hat{\xi}, \cdot)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ ist eine Borel-meßbare Obermenge von K, und die Einschränkung der Funktion $f^{\#}(\hat{t}, \hat{\xi}, \cdot)$ auf ihren effektiven Definitionsbereich ist Borel-meßbar und auf jeder beschränkten Menge nach unten beschränkt.

b) $f^{\#}(t, \xi, v) \leqslant f(t, \xi, v)$ für alle $(t, \xi, v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}$, also

$$F^{\#}(x) = \int_\Omega f^{\#}(t, x(t), Jx(t))\, dt \leqslant \int_\Omega f(t, x(t), Jx(t))\, dt = F(x) \text{ für alle in (P) zulässigen Funktionen } x.$$

c) Für alle Folgen in (P) zulässiger Funktionen $\{x^N\}$ mit $x^N \xrightarrow{*} {}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \hat{x}$ und $Jx^N \xrightarrow{*} {}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})} J\hat{x}$ gilt: $F^{\#}(\hat{x}) \leqslant \liminf_{N\to\infty} F^{\#}(x^N)$.

d) Der Minimalwert der folgenden Aufgabe

$$(\mathrm{P})^{\#} \quad F^{\#}(x) = \int_\Omega f^{\#}(t, x(t), Jx(t))\, dt \longrightarrow \inf!\,; \quad x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,; \quad Jx(t) \in \mathrm{K} \ (\forall)\, t \in \Omega \tag{1.4}$$

stimmt mit dem Minimalwert von (P) überein.

Dann haben die Aufgaben (P) und $(\mathrm{P})^{\#}$ denselben endlichen Minimalwert, und jede Minimalfolge $\{x^N\}$ von (P) besitzt eine Teilfolge $\{x^{N'}\}$, die zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen schwach (im Sinne des $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ bzw. des $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$) gegen eine globale Minimalstelle $\hat{x}$ von $(\mathrm{P})^{\#}$ konvergiert.*

Wir zitieren nun die bisher bekannten Relaxationssätze für (P), wobei die Integranden als Elemente der Funktionenklassen $\mathcal{F}_\mathrm{K}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{F}}_\mathrm{K}$ von vornherein für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$ erklärt sein sollen:

Satz 1.3.: *Wir betrachten (P) unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 1.a).*

1)[12] **(konvexe Relaxation von (P), Integrand hängt nur von t und v ab, $n = 1$):** *Zusätzlich sei $m \geqslant 2$, $n = 1$, und $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mathfrak{o}, \varrho) \subset \mathbb{R}^{nm}$ sei eine Kugel um den Nullpunkt. Der Integrand $f(t, v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ gehöre zu $\widetilde{\mathcal{F}}_\mathrm{K}$, hänge jedoch nicht von ξ ab. Dann hat die Funktion $f^{\#}(t, v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$, die für festes $\hat{t} \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big)$ durch*

$$f^{\#}(\hat{t}, v) = f^c(\hat{t}, v) = \sup\big\{\, g(v) \;\big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \ \text{ konvex, } \ g(w) \leqslant f(\hat{t}, w) \ \forall\, w \in \mathbb{R}^{nm} \,\big\} \tag{1.5}$$

als konvexe Hüllfunktion von f bezüglich der Variablen v und für $\hat{t} \in \mathrm{N}$ durch Null definiert wird, die Eigenschaften a) – d) aus Satz 1.2.

2)[13] **(quasikonvexe Relaxation von (P), Integrand hängt nur von v ab, $n \geqslant 1$):** *Zusätzlich sei $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, und $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ sei ein beliebiger konvexer Körper mit $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$. Der Integrand $f(v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$ hänge nicht von t und ξ ab und gehöre zur Funktionenklasse $\mathcal{F}_\mathrm{K}$. Dann hat die Funktion $f^{\#}(v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{(+\infty)\}$, die durch*

$$\begin{aligned} f^{\#}(v) &= f^{(qc)}(v) \\ &= \sup\big\{\, g(v) \;\big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{ quasikonvex und unterhalbstetig, } \ g(w) \leqslant f(w) \ \forall\, w \in \mathbb{R}^{nm} \,\big\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

als unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion von f definiert wird, die Eigenschaften a) – d) aus Satz 1.2.

Als Verallgemeinerung der Relaxationssätze von Ekeland/Témam und Wagner beweisen wir den folgenden Satz, das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit:

---

[12] [Ekeland/Témam 99], p. 327, Corollary 2.17., zusammen mit p. 334, Proposition 3.4., und p. 335 f., Proposition 3.6.

[13] [Wagner 07b], p. 3, Theorem 1.3.

Satz 1.4. (quasikonvexe Relaxation von (P)**,** $n \geqslant 1$**):** *Wir betrachten* (P) *unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 1.a); insbesondere sei* $m \geqslant 2$*,* $n \geqslant 1$*, und* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *sei ein beliebiger konvexer Körper mit* $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$*. Der Integrand* $f(t,\xi,v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{\,(+\infty)\,\}$ *gehöre zur Funktionenklasse* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$*. Dann hat die Funktion* $f^{\#}(t,\xi,v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{\,(+\infty)\,\}$*, die für festes* $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ *durch*

$$\begin{aligned} f^{\#}(\hat{t},\hat{\xi},v) &= f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) \\ &= \sup\big\{\, g(v) \;\big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}} \ \textit{quasikonvex und unterhalbstetig},\ \ g(w) \leqslant f(\hat{t},\hat{\xi},w)\ \ \forall\, w \in \mathbb{R}^{nm} \,\big\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

als unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion von f *bezüglich der Variablen* v *und für* $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \mathrm{N} \times \mathbb{R}^n$ *durch Null definiert wird, die Eigenschaften a) – d) aus Satz 1.2. Also besitzt die Aufgabe*

$$(\mathrm{P})^{(qc)} \quad F^{(qc)}(x) = \int_\Omega f^{(qc)}(t,x(t),Jx(t))\,dt \longrightarrow \inf!\,; \quad x \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)\,; \quad Jx(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega \tag{1.8}$$

denselben endlichen Minimalwert wie die Aufgabe (P)*, und jede Minimalfolge* $\{\,x^N\,\}$ *von* (P) *besitzt eine Teilfolge* $\{\,x^{N'}\,\}$*, die zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen schwach* (im Sinne des* $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *bzw. des* $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})$ *) gegen eine globale Minimalstelle* $\hat{x}$ *von* $(\mathrm{P})^{(qc)}$ *konvergiert.*

Als Folgerung aus Satz 1.4. beweisen wir folgenden Existenzsatz für Steuerungsprobleme (P) mit polykonvexen Integranden:

Satz 1.5. (Existenzsatz für (P) **mit polykonvexem Integranden):** *Wir betrachten* (P) *unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 1.a); insbesondere sei* $m \geqslant 2$*,* $n \geqslant 1$*, und* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *sei ein beliebiger konvexer Körper mit* $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$*. Der Integrand* $f(t,\xi,v)\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{\,(+\infty)\,\}$ *gehöre zu* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$*. Außerdem sei* $f(\hat{t},\hat{\xi},v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \cup \{\,(+\infty)\,\}$ *für alle festen* $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ *als Funktion von* v *polykonvex (siehe Definition 3.9. unten); dabei ist* $\mathrm{N} \subset \Omega$ *die* m*-dimensionale Lebesguesche Nullmenge aus Definition 1.1., 2). Dann besitzt die Aufgabe* (P) *eine globale Minimalstelle* $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$*.*

c) Gliederung der Arbeit.

Am Ende von *Kapitel 1* stellen wir die in der Arbeit verwendeten Notationen sowie die benötigten Hilfssätze aus der Maßtheorie zusammen. *Kapitel 2* beginnt mit der Definition von quasikonvexen Funktionen, die den Wert $(+\infty)$ annehmen können; anschließend fassen wir die bisher bekannten Eigenschaften der unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion $f^{(qc)}$ zu Integranden $f = f(v) \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ zusammen. Danach untersuchen wir die bezüglich der letzten Variable gebildete unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}$ für Integranden $f = f(t,\xi,v) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$ und beweisen drei Abschätzungen, die sich auf eine stetige Einschränkung $f\,\big|\,\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ von f auf eine kompakte Teilmenge von $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}$ beziehen (Sätze 2.11., 2.12. und 2.14.). Die Beweise zu Satz 1.2., Satz 1.4. und Satz 1.5. werden in *Kapitel 3* erbracht. Schließlich beweisen wir in *Kapitel 4* mit Hilfe der Sätze 1.4. und 1.5. Existenzaussagen für ein Problem der mathematischen Bildverarbeitung, das image-registration-Problem mit konvexen und polykonvexen Regularisierungstermen.

d) Zur Notation.

Sei $k \in \{\,0,\,1,\,\ldots\,,\,\infty\,\}$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dann bezeichnen $C^k(\Omega,\mathbb{R}^r)$, $L^p(\Omega,\mathbb{R}^r)$ und $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{R}^r)$ die Räume der r-dimensionalen Vektorfunktionen, deren Komponenten k-mal stetig differenzierbar sind, in p-ter Potenz integrabel sind bzw. zum Sobolevraum jener $L^p(\Omega,\mathbb{R})$-Funktionen gehören, die verallgemeinerte partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung besitzen, welche ebenfalls im $L^p(\Omega,\mathbb{R})$ liegen. Funktionen aus den Unterräumen $C_0^k(\Omega,\mathbb{R}^r) \subset C^k(\Omega,\mathbb{R}^r)$ und $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^r) \subset W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^r)$ haben überdies kompakte Träger;

die Komponenten von $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ besitzen Lipschitz-stetige Repräsentanten [14] mit Nullrandwerten. Die Symbole x_{t_j} und $\partial x/\partial t_j$ können sowohl die klassische als auch die verallgemeinerte partielle Ableitung von x nach t_j bezeichnen. Jx ist die Jacobimatrix der Funktion x.
Mit $\operatorname{int}(\mathrm{A})$, $\operatorname{ri}(\mathrm{A})$, $\partial\mathrm{A}$, $\operatorname{rb}(\mathrm{A})$, $\operatorname{cl}(\mathrm{A})$, $\operatorname{co}(\mathrm{A})$ und $|\,\mathrm{A}\,|$ bezeichnen wir das Innere, das relativ Innere, den Rand, den relativen Rand, den Abschluß, die konvexe Hülle bzw. das r-dimensionale Lebesguesche Maß einer Menge $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^r$. $\mathbb{1}_\mathrm{A} \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}_\mathrm{A}(t) = 1 \iff t \in \mathrm{A}$ und $\mathbb{1}_\mathrm{A}(t) = 0 \iff t \notin \mathrm{A}$ ist die charakteristische Funktion der Menge A. Wir definieren $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und erweitern die natürlichen topologischen und Ordnungsstrukturen der Zahlengeraden in natürlicher Weise, so daß der unendlich ferne Punkt $(+\infty)$ als größtes Element hinzukommt.
In der gesamten Arbeit betrachten wir nur *eigentliche Funktionen* $f \colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$, deren effektiver Definitionsbereich $\operatorname{dom}(f) = \{\, v \in \mathbb{R}^{nm} \mid f(v) < (+\infty) \,\}$ als nichtleer vorausgesetzt wird. Die Einschränkung einer Funktion f auf eine Teilmenge A ihres Definitionsbereiches wird mit $f \,\big|\, \mathrm{A}$ bezeichnet. Gehört eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ zur oben definierten Funktionenklasse $\mathcal{F}_\mathrm{K}$, so ist ihre Einschränkung $f \,\big|\, \mathrm{K}$ beschränkt und (sogar gleichmäßig) stetig. $\mathcal{F}_\mathrm{K}$ ist daher isomorph und isometrisch zum Banachraum $C^0(\mathrm{K}, \mathbb{R})$.
Unter einem konvexen Körper $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ verstehen wir eine konvexe, kompakte Menge mit nichtleerem Inneren. [15] Ein Punkt $v \in \mathrm{K}$ heißt Extremalpunkt von K, falls aus $v = \lambda' v' + \lambda'' v''$, $\lambda', \lambda'' > 0$, $\lambda' + \lambda'' = 1$, $v', v'' \in \mathrm{K}$ stets $v' = v'' = v$ folgt. Die Menge aller Extremalpunkte von K wird mit $\operatorname{ext}(\mathrm{K})$ bezeichnet. Jeder konvexe Körper muß mindestens einen Extremalpunkt besitzen. Eine konvexe Teilmenge $\varPhi \subseteq \mathrm{K}$ heißt Facette von K, wenn aus $v \in \varPhi$ und $v = \lambda' v' + \lambda'' v''$, $\lambda', \lambda'' > 0$, $\lambda' + \lambda'' = 1$, $v', v'' \in \mathrm{K}$ stets $v', v'' \in \varPhi$ folgt. [16] Auch K selbst und $\emptyset$ werden als (uneigentliche) Facetten angesehen. Alle Facetten eines konvexen Körpers sind kompakt. Die Dimension k einer Facette ist die ihrer affine Hülle; wir setzen $\operatorname{Dim}(\emptyset) = (-1)$. Die nulldimensionalen Facetten von K sind also genau die einpunktigen Mengen $\{\, x \,\}$, $x \in \operatorname{ext}(\mathrm{K})$.
Wir verwenden drei Bezeichnungen, die vom üblichen Gebrauch abweichen: "$\{\, x^N \,\}$, A" bezeichnet eine Folge $\{\, x^N \,\}$ mit Gliedern $x^N \in \mathrm{A}$. Für $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^r$ ist die Abkürzung "$(\forall)\, t \in \mathrm{A}$" zu lesen als: "für fast alle $t \in \mathrm{A}$" bzw. "für alle $t \in \mathrm{A}$ mit Ausnahme einer r-dimensionalen Lebesgueschen Nullmenge". Schließlich bezeichnet das Symbol $\mathfrak{o}$ kontextabhängig das Nullelement bzw. die Nullfunktion des zugrundeliegenden Raumes.

e) Begriffe und Hilfssätze aus der Maßtheorie.

Definition 1.6. (Carathéodory-Funktionen): $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ *sei eine Borelsche Menge. Eine Funktion* $f(t, \xi, v) \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ *heißt Carathéodory-Funktion, wenn eine* m*-dimensionale Lebesguesche Nullmenge* $\mathrm{N} \subset \Omega$ *existiert, so daß die Einschränkung* $f \,\big|\, \big(\, (\Omega \setminus \mathrm{N}) \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K} \,\big)$ *bezüglich* t *Borel-meßbar und bezüglich* (ξ, v) *stetig ist.*

Aus Definition 1.1., 2), ergibt sich, daß die Einschränkung einer Funktion $f \in \widetilde{\mathcal{F}}_\mathrm{K}$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}$ eine Carathéodory-Funktion ist.

Satz 1.7. (Satz von Scorza-Dragoni): [17] $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ *sei eine Borelsche Menge. Eine Funktion* $f(t, \xi, v) \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ *ist genau dann eine Carathéodory-Funktion, wenn zu jeder kompakten Teilmenge* $\Omega_0 \subseteq \Omega$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *eine kompakte Menge* $\Omega_c \subseteq \Omega_0$ *mit* $|\,\Omega_0 \setminus \Omega_c\,| \leqslant \varepsilon$ *existiert, so daß die Einschränkung* $f \,\big|\, \big(\, \Omega_c \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K} \,\big)$ *bezüglich* (t, ξ, v) *stetig ist.*

---

[14] [Evans/Gariepy 92], p. 131, Theorem 5.

[15] Wir folgen [Brøndsted 83] und [Schneider 93].

[16] Auf die in der englischsprachigen Literatur übliche Unterscheidung zwischen "facets" und "faces" wird verzichtet, vergl. [Brøndsted 83], p. 30.

[17] [Ekeland/Témam 99], p. 235, Scorza-Dragoni Theorem.

Lemma 1.8.:[18] *Gegeben seien eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $x \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann kann man zu jedem $\eta > 0$ und jedem $\delta > 0$ endlich viele paarweise disjunkte abgeschlossene Würfel $\mathrm{Q}_s \subseteq \Omega$, $1 \leqslant s \leqslant r$, mit Kantenlänge $0 < \eta_s \leqslant \eta$ finden, so daß gilt:*

1) $\left| \Omega \setminus \bigcup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s \right| \leqslant \delta\,;$ (1.9)

2) $\left| x_i(t) - \dfrac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|} \displaystyle\int_{\mathrm{Q}_s} x_i(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \delta \quad (\forall)\, t \in \mathrm{Q}_s\,,\ 1 \leqslant s \leqslant r\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\,.$ (1.10)

2. Die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion.

a) Quasikonvexe Funktionen, die den Wert $(+\infty)$ annehmen können.

Definition 2.1. (quasikonvexe Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$):[19] *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften heißt quasikonvex:*

a) $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ *ist eine nichtleere Borelsche Menge;*

b) $f \,\big|\, \mathrm{dom}\,(f)$ *ist Borel-meßbar und auf jeder beschränkten Teilmenge von* $\mathrm{dom}\,(f)$ *nach unten beschränkt;*

c) für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$ erfüllt f die Morreysche Integralungleichung

$$f(v) \leqslant \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_{\Omega} f(\,v + Jx(t)\,)\, dt \quad \forall\, x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,; \tag{2.1}$$

das ist gleichbedeutend mit

$$f(v) = \inf \Big\{ \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_{\Omega} f(\,v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,,\ v + Jx(t) \in \mathbb{R}^{nm}\ \ (\forall)\, t \in \Omega \Big\}\,. \tag{2.2}$$

Hierbei entsteht $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ als Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne.

Wir benutzen die Konvention, wonach das Integral $\int_{\mathrm{A}} (+\infty)\, dt$ Null oder $(+\infty)$ zu setzen ist, je nachdem A eine m-dimensionale Lebesguesche Nullmenge ist oder positives Maß besitzt. Man beachte, daß die Abänderung des Integranden f auf einer Lebesgueschen Nullmenge des $\mathbb{R}^{nm}$ nicht statthaft ist. Ist $\mathrm{dom}\,(f)$ ein konvexer Körper, so kann die Menge der "Testfunktionen" in der Morreyschen Integralungleichung wie folgt eingeschränkt werden:

Satz 2.2. (Morreysche Integralungleichung für Funktionen mit $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{K}$):[20] *Sei $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ ein konvexer Körper. Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{K}$. $f \,\big|\, \mathrm{K}$ sei meßbar und beschränkt. Dann erfüllt f die Morreysche Integralungleichung in $v \in \mathrm{K}$ genau dann, wenn gilt:*

$$f(v) = \inf \Big\{ \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_{\Omega} f(\,v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,,\ v + Jx(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega \Big\}\,. \tag{2.3}$$

b) Die auf K bezogene Hüllfunktion f^*.

In allen Definitionen und Sätzen dieses Abschnitts beziehen wir uns auf einen beliebigen, aber festen konvexen Körper $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ mit $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ und den Kenngrößen $c_{\mathrm{K}} = \mathrm{Dist}\,(\mathfrak{o}\,, \partial\mathrm{K})$ und $C_{\mathrm{K}} = \mathrm{Max}\,\big(1\,, \mathrm{Max}_{v \in \mathrm{K}}\, |\,v\,|\big)$, also $0 < c_{\mathrm{K}} \leqslant C_{\mathrm{K}}$ und $\mathrm{Diam}\,(\mathrm{K}) \leqslant 2\, C_{\mathrm{K}}$.

---

[18] Geringfügig verändert nach [Wagner 07b], p. 10, Lemma 3.4. Der Beweis bleibt unverändert.

[19] [Wagner 06c], p. 6, Definition 2.9., als Präzisierung von [Ball/Murat 84], p. 228, Definition 2.1., im Fall $p = (+\infty)$. Vergleiche auch [Conti 08], p. 16.

[20] [Wagner 06c], p. 7, Theorem 2.11., 2).

Definition 2.3. (auf K bezogene Hüllfunktion f^*):[21] *Sei* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *der oben genannte konvexe Körper und* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:* $\operatorname{dom}(f)$ *ist eine meßbare Menge,* $f \,\big|\, \operatorname{dom}(f)$ *ist eine meßbare Funktion, und* f *ist auf ganz* $\mathbb{R}^{nm}$ *nach unten beschränkt. Dann definieren wir für alle* $v \in \mathbb{R}^{nm}$*:*

$$f^*(v) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,. \tag{2.4}$$

Im Verlauf der Arbeit werden wir auf zwei spezielle Eigenschaften von f^* Bezug nehmen:

Satz 2.4. (Unabhängigkeit der Definition von f^* von Ω):[22] *Seien* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *und* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *wie in Definition 2.3. Wenn die beiden Mengen* Ω, $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ *jeweils Abschluß beschränkter Lipschitzgebiete im strengen Sinne sind, so gilt*

$$f^*(v) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\} \tag{2.5}$$

$$\;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\widetilde{\Omega}\,|} \int_{\widetilde{\Omega}} f(\,v + Jx(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in W_0^{1,\infty}(\widetilde{\Omega}\,,\, \mathbb{R}^n)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \widetilde{\Omega} \,\Big\}\,. \tag{2.6}$$

Satz 2.5. (spezielle Folge $\{\,x^N\,\}$, die das Infimum in Definition 2.3. realisiert):[23] *Seien* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *und* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *wie in Definition 2.3. Wenn* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *ein Würfel ist, so existiert zu jedem* $v \in \mathbb{R}^{nm}$ *eine Folge* $\{\,x^N\,\}, W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *mit*

$$f^*(v) \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx^N(t)\,)\,dt\,,\; v + Jx^N(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \;\; \forall\, N \in \mathbb{N}\,,$$

$$x^N \overset{*}{\rightharpoonup}_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \mathfrak{o} \quad \textit{und} \quad Jx^N \overset{*}{\rightharpoonup}_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})} \mathfrak{o}\,. \tag{2.7}$$

c) Die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}(v)$ zu $f \in \mathcal{F}_\mathrm{K}$.

Definition 2.6. (unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}$ für Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$):[24] *Zu einer nach unten beschränkten Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *definieren wir die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion* $f^{(qc)}\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *gemäß*

$$f^{(qc)}(v) \;=\; \sup\Big\{\, g(v) \;\Big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}} \;\; \textit{quasikonvex und unterhalbstetig,}\;\; g(w) \leqslant f(w) \;\; \forall\, w \in \mathbb{R}^{nm} \,\Big\}\,. \tag{2.8}$$

Anmerkungen: a) Definition 2.6. ist durch die Beobachtung motiviert, daß quasikonvexe Funktionen $g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ von vornherein stetig sind.[25] Wenn eine meßbare Funktion f nur Werte in $\mathbb{R}$ annimmt und nach unten beschränkt ist, so fällt Definition 2.6. mit der üblichen Definition der quasikonvexen Hüllfunktion zusammen,[26] und $f^{(qc)}$ ist dann quasikonvex und stetig.

---

[21] Die Funktion f^* wurde in [Kinderlehrer/Pedregal 91], p. 356, für den Spezialfall $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mathfrak{o}, \varrho)$ und in [Dacorogna/Marcellini 97], p. 27, Theorem 7.2., für beliebige konvexe Körper K eingeführt. In beiden Fällen wurde $f \in C^0(\mathrm{K}\,,\, \mathbb{R})$ vorausgesetzt. Wir formulieren die Definition im Anschluß an [Wagner 06c], p. 14, Definition 3.1., von vornherein für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$.

[22] [Dacorogna/Marcellini 97], p. 28 f., Step 1.

[23] [Dacorogna/Marcellini 97], p. 35, Step 6.

[24] [Wagner 06c], p. 9, Definition 2.14., 2).

[25] [Dacorogna 08], p. 159, Theorem 5.3., (iv).

[26] Vergleiche [Dacorogna 08], p. 156 f., Definition 5.1., ii).

b) Sind nach zwei unten beschränkte Funktionen $f_1,\ f_2\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben, so besteht die Implikation $f_1(v) \leqslant f_2(v)\ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm} \Longrightarrow {f_1}^{(qc)}(v) \leqslant {f_2}^{(qc)}(v)\ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm}$. [27]

c) Für $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ erfüllt $f^{(qc)}$ die Ungleichung $f^c(v) \leqslant f^{(qc)}(v) \leqslant f(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$, also gilt insbesondere $f^{(qc)}(v) = (+\infty)$ für alle $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ und $f^{(qc)}(v) = f(v)$ für alle $v \in \operatorname{ext}(\mathrm{K})$. Weiterhin ist $f^{(qc)}$ eine unterhalbstetige und quasikonvexe Funktion, also bei der eigenen Bildung selbst mit zulässig. [28] Daraus ergibt sich, daß $f^{(qc)}$ die größte quasikonvexe, unterhalbstetige Funktion unterhalb von f ist. [29]

Die Struktur der unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion zu einem Integranden $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ wird durch folgenden Darstellungssatz beschrieben:

Satz 2.7. (Darstellungssatz für $f^{(qc)}$): [30] *Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ gestattet die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}$ die Darstellung*

$$f^{(qc)}(v_0) = \begin{cases} f^*(v_0) \;\big|\; v_0 \in \operatorname{int}(\mathrm{K})\,; \\ \lim\limits_{v \to v_0\,,\, v \in \mathrm{R} \cap \operatorname{int}(\mathrm{K})} f^*(v) \;\big|\; v_0 \in \partial\mathrm{K}\,; \\ (+\infty) \;\big|\; v_0 \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

wobei $f^*(v)$ durch Definition 2.3. erklärt ist.

Mit den folgenden Sätzen wird der Zusammenhang zwischen der gleichmäßigen Stetigkeit der Einschränkung von $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ auf K und der Stetigkeit bzw. Halbstetigkeit von $f^{(qc)}$ quantifiziert. Dabei beziehen wir uns auf einen konvexen Körper $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ mit den am Beginn von Abschnitt 2.b) eingeführten Kenngrößen.

Satz 2.8. (ε-δ-Relation für die Einschränkung von $f^{(qc)}$ auf Facetten von K): [31] *Sei $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ und Φ eine k-dimensionale Facette von K, $0 \leqslant k \leqslant nm$. Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf K werde durch die ε-δ-Relation*

$$\big|\, v' - v'' \,\big| \leqslant \delta(\varepsilon) < 1 \implies \big|\, f(v') - f(v'') \,\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, v',\, v'' \in \mathrm{K} \tag{2.10}$$

beschrieben. Dann besteht für $f^{(qc)} \,\big|\, \Phi$ folgende ε-δ-Relation:

$$\begin{aligned} \big|\, v' - v'' \,\big| \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{4\, C_{\mathrm{K}}} \cdot \operatorname{Min}\big(1\,,\, \operatorname{Dist}(v',\, \operatorname{rb}(\Phi))\,,\, \operatorname{Dist}(v'',\, \operatorname{rb}(\Phi))\big) \implies \\ \big|\, f^{(qc)}(v') - f^{(qc)}(v'') \,\big| \leqslant 2\,\varepsilon \quad \forall\, v',\, v'' \in \operatorname{ri}(\Phi)\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

wobei C_{K} die Kenngröße vom Anfang von Abschnitt 2.b) ist.

Hieraus ergibt sich insbesondere die Stetigkeit der Einschränkung $f^{(qc)} \,\big|\, \operatorname{int}(\mathrm{K})$.

Satz 2.9. (ε-δ-Relation für $f^{(qc)}$ auf Strahlen, die von $\mathfrak{o}$ ausgehen): [32] *Sei $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$. Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf K werde wiederum durch die ε-δ-Relation*

$$\big|\, v' - v'' \,\big| \leqslant \delta(\varepsilon) < 1 \implies \big|\, f(v') - f(v'') \,\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, v',\, v'' \in \mathrm{K} \tag{2.12}$$

---

[27] [Wagner 06c], p. 10, Lemma 2.15., 3).

[28] [Wagner 06c], p. 10, Theorem 2.17.

[29] [Wagner 06c], p. 10, Theorem 2.18.

[30] [Wagner 06c], p. 29, Theorem 4.1.

[31] [Wagner 06c], p. 16, Theorem 3.5., zusammen mit Satz 2.7. oben.

[32] [Wagner 06c], p. 22, Theorem 3.12., zusammen mit Satz 2.7. oben.

beschrieben. Gegeben seien weiter zwei Punkte $v,\, w \in \mathrm{K}$, *die a) auf dem gleichen von* $\mathfrak{o}$ *ausgehenden Strahl* R *liegen und b)* $0 \leqslant \mathrm{Dist}\,(w\,,\,\partial\mathrm{K}) \leqslant \mathrm{Dist}\,(v\,,\,\partial\mathrm{K}) < \frac{1}{2}\,c_{\mathrm{K}}$ *erfüllen. Dann besteht für* $f^{(qc)}$ *auf allen von* $\mathfrak{o}$ *ausgehenden Strahlen* R *dieselbe* ε-δ-*Abschätzung:*

$$\mathrm{Dist}\,(w\,,\,v) \;\leqslant\; \delta(\varepsilon)\cdot\frac{c_{\mathrm{K}}}{6\,C_{\mathrm{K}}} \;\;\Longrightarrow\;\; f^{(qc)}(w) - f^{(qc)}(v) \;\geqslant\; -2\,\varepsilon\,, \tag{2.13}$$

wobei c_{K} *und* C_{K} *die Kenngrößen vom Anfang von Abschnitt 2.b) sind.*

d) Die unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}(t,\xi,v)$ **zu** $f \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{K}}$**.**

Satz 2.10. (Eigenschaften von $f^{(qc)}$ **zu** $f \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{K}}$**):** *Sei* $f \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{K}}$ *gegeben. Dann gilt für jedes feste* $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\,\Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^n$*:*

1) $f^{c}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\leqslant\; f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\leqslant\; f(\hat{t},\hat{\xi},v)$ *für alle* $v \in \mathbb{R}^{nm}$*, also insbesondere* $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) = (+\infty)$ *für alle* $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ *und* $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) = f(\hat{t},\hat{\xi},v)$ *für alle* $v \in \mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$*.*

2) $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v)\colon\, \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist die größte unterhalbstetige und quasikonvexe Funktion unterhalb von* $f(\hat{t},\hat{\xi},v)$*.*

3) $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v)$ *besitzt die Darstellung*

$$f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v_0) = \begin{cases} \qquad\qquad f^{*}(\hat{t},\hat{\xi},v_0) \;\big|\; v_0 \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\,; \\[2ex] \displaystyle\lim_{v\to v_0\,,\, v\,\in\,\mathrm{R}\,\cap\,\mathrm{int}\,(\mathrm{K})} f^{*}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\big|\; v_0 \in \partial\mathrm{K}\,; \\[2ex] \qquad\qquad (+\infty) \;\big|\; v_0 \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}\,, \end{cases} \tag{2.14}$$

worin $f^{*}(\hat{t},\hat{\xi},v)$ *durch*

$$f^{*}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega} f(\hat{t},\hat{\xi},v + Jx(t))\,dt \;\Big|\; x \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K}\;\; (\forall)\, t \in \Omega\,\Big\} \tag{2.15}$$

erklärt ist.

4) Sei $\varPhi$ *eine* k*-dimensionale Facette von* K*,* $0 \leqslant k \leqslant nm$*. Die gleichmäßige Stetigkeit von* $f(\hat{t},\hat{\xi},v)$ *auf* K *werde durch die* ε-δ-*Relation*

$$\big|\, v' - v''\,\big| \;\leqslant\; \delta(\varepsilon) \;<\; 1 \;\;\Longrightarrow\;\; \big|\, f(\hat{t},\hat{\xi},v') - f(\hat{t},\hat{\xi},v'')\,\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, v',\, v'' \in \mathrm{K} \tag{2.16}$$

beschrieben. Dann besteht für $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v)\,\big|\,\varPhi$ *folgende* ε-δ-*Relation:*

$$\begin{aligned} \big|\, v' - v''\,\big| \;\leqslant\; \frac{\delta(\varepsilon)}{4\,C_{\mathrm{K}}}\cdot \mathrm{Min}\big(\,1\,,\,\mathrm{Dist}\,(v',\,\mathrm{rb}\,(\varPhi))\,,\,\mathrm{Dist}\,(v'',\,\mathrm{rb}\,(\varPhi))\,\big) \;\;\Longrightarrow\; \\ \big|\, f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v') - f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v'')\,\big| \;\leqslant\; 2\,\varepsilon \quad \forall\, v',\, v'' \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)\,, \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei C_{K} *die Kenngröße aus Abschnitt 2.b) ist. Insbesondere ist* $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v)\,\big|\,\mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ *stetig und* $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v)\,\big|\,(1-\gamma)\,\mathrm{K}$ *für jedes* $0 < \gamma < 1$ *gleichmäßig stetig.*

5) Die gleichmäßige Stetigkeit von $f(\hat{t},\hat{\xi},v)$ *auf* K *werde durch dieselbe* ε-δ-*Relation wie in 4) beschrieben. Dann besteht für Punkte* $v,\, w \in \mathrm{K}$*, die a) auf dem gleichen von* $\mathfrak{o}$ *ausgehenden Strahl* R *liegen und b)* $0 \leqslant \mathrm{Dist}\,(w\,,\,\partial\mathrm{K}) \leqslant \mathrm{Dist}\,(v\,,\,\partial\mathrm{K}) < \frac{1}{2}\,c_{\mathrm{K}}$ *erfüllen, die* ε-δ-*Abschätzung*

$$\mathrm{Dist}\,(w\,,\,v) \;\leqslant\; \delta(\varepsilon)\cdot\frac{c_{\mathrm{K}}}{6\,C_{\mathrm{K}}} \;\;\Longrightarrow\;\; f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},w) - f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\geqslant\; -2\,\varepsilon\,, \tag{2.18}$$

wobei c_{K} und C_{K} die Kenngrößen aus Abschnitt 2.b) sind. Dabei gilt für alle von $\mathfrak{o}$ ausgehenden Strahlen R *ein und dieselbe Abschätzung.*

Beweis: 1) – 3): Ist eine Funktion $f(t,\xi,v) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$ gegeben, so gehört die Funktion $f(\hat{t},\hat{\xi},v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ nach Definition 1.1., 2) für jedes feste $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ zu $\mathcal{F}_{\mathrm{K}}$. Damit ergeben sich 1) – 3) aus den Anmerkungen nach Definition 2.6. und den dort zitierten Sätzen aus [Wagner 06c].

4) – 5): Für festes $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ ist $f(\hat{t},\hat{\xi},v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ auf K sogar gleichmäßig stetig. Also ergeben sich 4) und 5) aus Satz 2.7., Satz 2.8. und Satz 2.9. ∎

Satz 2.11.: *Gegeben seien eine Funktion $f \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$ und kompakte Teilmengen $\Omega_c \subseteq \Omega$ und $\mathrm{A}_c \subset \mathbb{R}^n$, so daß die Einschränkung $f\,\big|\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ bezüglich (t,ξ,v) stetig ist. Dies werde durch die ε-δ-Relation*

$$\begin{aligned} &\big|\,t'-t''\,\big| + \big|\,\xi'-\xi''\,\big| + \big|\,v'-v''\,\big| \leqslant \delta_0(\varepsilon) < 1 \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \big|\,f(t',\xi',v') - f(t'',\xi'',v'')\,\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\,(t',\xi',v'),\,(t'',\xi'',v'') \in \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big) \end{aligned} \tag{2.19}$$

beschrieben. Dann gilt:

1) Für die Einschränkung $f^{(qc)}(t,\xi,v)\,\big|\,\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\big)$ besteht folgende Stetigkeitsrelation bezüglich (t,ξ,v):

$$\begin{aligned} &\big|\,t'-t''\,\big| + \big|\,\xi'-\xi''\,\big| + \big|\,v'-v''\,\big| \leqslant \frac{\delta_0(\varepsilon)}{4\,C_{\mathrm{K}}} \cdot \mathrm{Min}\big(1\,,\,\mathrm{Dist}\,(v',\,\partial\mathrm{K})\,,\,\mathrm{Dist}\,(v'',\,\partial\mathrm{K})\big) \Longrightarrow \\ &\qquad \big|\,f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v'')\,\big| \leqslant 6\,\varepsilon \quad \forall\,(t',\xi',v'),\,(t'',\xi'',v'') \in \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\big)\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

2) Für jedes $0 < \gamma < 1$ ist die Einschränkung $f^{(qc)}(t,\xi,v)\,\big|\,\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times (1-\gamma)\,\mathrm{K}\big)$ bezüglich (t,ξ,v) gleichmäßig stetig.

Beweis: 1): Für alle $(t',\xi',v'),\,(t'',\xi'',v'') \in \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\big)$ gilt:

$$\big|\,f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v'')\,\big| \leqslant D_1 + D_2 + D_3 \quad \text{mit} \tag{2.21}$$

$$D_1 = \big|\,f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi',v')\,\big|\,; \tag{2.22}$$

$$D_2 = \big|\,f^{(qc)}(t'',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v')\,\big|\,; \tag{2.23}$$

$$D_3 = \big|\,f^{(qc)}(t'',\xi'',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v'')\,\big|\,. \tag{2.24}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann findet man ein $x_1 \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ mit

$$\begin{aligned} &f^{(qc)}(t',\xi',v') \leqslant \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(t',\xi',v'+Jx_1(t)\,)\,dt \leqslant f^{(qc)}(t',\xi',v') + \varepsilon \\ &\text{und}\quad v' + Jx_1(t) \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\ \ (\forall)\,t \in \Omega \end{aligned} \tag{2.25}$$

(vergleiche [Wagner 06b], p. 21, Satz 3.4., 2), bzw. [Wagner 06c], p. 15, Theorem 3.4., 2)). Damit folgt aus der Stetigkeitsrelation (2.19):

$$\begin{aligned} &\big|\,t'-t''\,\big| \leqslant \delta_0(\varepsilon) \Longrightarrow \\ &\frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega \Big(\,f(t',\xi',v'+Jx_1(t)\,) - f(t'',\xi',v'+Jx_1(t)\,)\,\Big)\,dt + \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(t'',\xi',v'+Jx_1(t)\,)\,dt \\ &\qquad\qquad \leqslant f^{(qc)}(t',\xi',v') + \varepsilon \Longrightarrow \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$-\,\varepsilon + f^{(qc)}(t'',\xi',v') \leqslant -\varepsilon + \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(t'',\xi',v'+Jx_1(t)\,)\,dt \leqslant f^{(qc)}(t',\xi',v') + \varepsilon \Longrightarrow \tag{2.27}$$

$$f^{(qc)}(t'',\xi',v') - f^{(qc)}(t',\xi',v') \leqslant 2\,\varepsilon\,. \tag{2.28}$$

Nun vertauscht man die Rollen von t' und t'' und erhält ebenso

$$f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi',v') \leqslant 2\,\varepsilon\,, \tag{2.29}$$

also zusammen

$$D_1 = \big|\, f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi',v') \,\big| \leqslant 2\,\varepsilon\,. \tag{2.30}$$

Weiter findet man ein $x_2 \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ mit

$$\begin{aligned} & f^{(qc)}(t'',\xi',v') \leqslant \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(t'',\xi',v'+Jx_2(t)\,)\,dt \leqslant f^{(qc)}(t'',\xi',v')+\varepsilon \\ & \text{und}\ \ v'+Jx_2(t) \in \operatorname{int}(\mathrm{K})\ \ (\forall)\,t\in\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

womit aus der Stetigkeitsrelation (2.19) folgt:

$$\big|\,\xi'-\xi''\,\big| \leqslant \delta_0(\varepsilon) \implies$$

$$\frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega\Big(\,f(t'',\xi',v'+Jx_2(t)\,)-f(t'',\xi'',v'+Jx_2(t)\,)\Big)\,dt + \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(t'',\xi'',v'+Jx_2(t)\,)\,dt$$
$$\leqslant f^{(qc)}(t'',\xi',v')+\varepsilon \implies \tag{2.32}$$

$$-\,\varepsilon + f^{(qc)}(t'',\xi'',v') \leqslant -\varepsilon + \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(t'',\xi'',v'+Jx_2(t)\,)\,dt \leqslant f^{(qc)}(t'',\xi',v')+\varepsilon \implies \tag{2.33}$$

$$f^{(qc)}(t'',\xi'',v') - f^{(qc)}(t'',\xi',v') \leqslant 2\,\varepsilon\,. \tag{2.34}$$

Nun vertauscht man die Rollen von ξ' und ξ'' und erhält ebenso

$$f^{(qc)}(t'',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v') \leqslant 2\,\varepsilon\,, \tag{2.35}$$

also zusammen

$$D_2 = \big|\, f^{(qc)}(t'',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v') \,\big| \leqslant 2\,\varepsilon\,. \tag{2.36}$$

Zur Abschätzung von D_3 greifen wir auf Satz 2.10., 4) zurück. Zusammen ergibt sich folgende ε-δ-Relation:

$$\begin{aligned} & \big|\,t'-t''\,\big| + \big|\,\xi'-\xi''\,\big| + \big|\,v'-v''\,\big| \leqslant \frac{\delta_0(\varepsilon)}{4\,C_{\mathrm{K}}}\cdot \operatorname{Min}\big(\,1\,,\,\operatorname{Dist}(v',\,\partial\mathrm{K})\,,\,\operatorname{Dist}(v'',\,\partial\mathrm{K})\,\big) \implies \\ & \qquad \big|\, f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v'') \,\big| \leqslant 6\,\varepsilon \quad \forall\,(t',\xi',v'),\,(t'',\xi'',v'') \in \big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \operatorname{int}(\mathrm{K})\,\big)\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Daraus folgt analog zu [Wagner 06c], p. 17, Theorem 3.6., 1) die Stetigkeit von $f^{(qc)}(t,\xi,v)$ auf $\big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \operatorname{int}(\mathrm{K})\,\big)$ bezüglich (t,ξ,v).

2): Sei $0<\gamma<1$. Auf $\big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times (1-\gamma)\,\mathrm{K}\,\big)$ gilt

$$\operatorname{Min}\big(\,1\,,\,\operatorname{Dist}(v',\,\partial\mathrm{K})\,,\,\operatorname{Dist}(v'',\,\partial\mathrm{K})\,\big) \geqslant \operatorname{Min}\big(\,1\,,\,\operatorname{Dist}(\,(1-\gamma)\,\mathrm{K}\,,\,\partial\mathrm{K})\,\big)\,, \tag{2.38}$$

damit geht (2.20) auf dieser Menge in eine gleichmäßige Stetigkeitsrelation über. ∎

Satz 2.12.: *Gegeben seien eine Funktion $f \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$ und kompakte Teilmengen $\Omega_c \subseteq \Omega$ und $\mathrm{A}_c \subset \mathbb{R}^n$, so daß die Einschränkung $f\,\big|\,\big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\,\big)$ bezüglich (t,ξ,v) stetig ist. Die gleichmäßige Stetigkeitsrelation sei*

durch (2.19) *gegeben. Dann besteht für Punkte* $v,\, w \in \mathrm{K}$, *die a) auf dem gleichen von* $\mathfrak{o}$ *ausgehenden Strahl* R *liegen und b)* $0 \leqslant \mathrm{Dist}\,(w\,,\,\partial\mathrm{K}) \leqslant \mathrm{Dist}\,(v\,,\,\partial\mathrm{K}) < \frac{1}{2}\,c_{\mathrm{K}}$ *erfüllen, die* ε*-*δ*-Abschätzung*

$$\mathrm{Dist}\,(w\,,\,v) \;\leqslant\; \delta_0(\varepsilon)\cdot\frac{c_{\mathrm{K}}}{6\,C_{\mathrm{K}}} \quad\Longrightarrow\quad f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},w) - f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\geqslant\; -2\,\varepsilon\,. \tag{2.39}$$

Dabei gilt für alle von $\mathfrak{o}$ *ausgehenden Strahlen* R *und alle* $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \Omega_c \times \mathrm{A}_c$ *ein und dieselbe Abschätzung.*

Beweis: In Satz 2.10., 5) hängt die Abschätzung nicht von der Wahl von $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \Omega_c \times \mathrm{A}_c$ ab. ∎

Satz 2.13.: *Gegeben seien eine Funktion* $f \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{K}}$ *und eine kompakte Teilmenge* $\mathrm{A}_c \subset \mathbb{R}^n$. *Dann erfüllt die (bezüglich der Variablen* v *gebildete) Funktion* $f^{(qc)}$ *die Wachstumsbedingung*

$$\big|\, f^{(qc)}(t,\xi,v)\,\big| \;\leqslant\; A(t) \,+\, C_2 \tag{2.40}$$

für alle $(t,\xi,v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}$. *A ist dieselbe Funktion wie in der Wachstumsbedingung für* f *aus Definition 1.1., 2).*

Beweis: Aus der Wachstumsbedingung in Definition 1.1., 2), Satz 2.10., 1) und dem Darstellungssatz für die konvexe Hüllfunktion (siehe [Dacorogna 08], p. 52, Theorem 2.35.) ergibt sich für beliebige $(\hat{t},\hat{\xi},v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}$:

$$\begin{aligned}
&A(\hat{t}) + C_2 \;\geqslant\; A(\hat{t}) + B(\hat{\xi},v) \;\geqslant\; f(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\geqslant\; f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) \;\geqslant\; f^{c}(\hat{t},\hat{\xi},v)\\
&= \inf\Big\{ \sum_{s=1}^{nm+1} \lambda_s\, f(\hat{t},\hat{\xi},v_s) \;\Big|\; \sum_s \lambda_s = 1\,,\; \sum_s \lambda_s\, v_s = v\,,\; 0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1\,,\; v_s \in \mathrm{K}\,,\; 1 \leqslant s \leqslant nm+1 \Big\}\\
&\geqslant \inf\Big\{ -\sum_{s=1}^{nm+1} \lambda_s \cdot |\, f(\hat{t},\hat{\xi},v_s)\,| \;\Big|\; \ldots \Big\} \;\geqslant\; \inf\Big\{ \sum_{s=1}^{nm+1} \lambda_s \big(-A(\hat{t}) - B(\hat{\xi},v_s)\big) \;\Big|\; \ldots \Big\} \;\geqslant\; -A(\hat{t}) - C_2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

und damit $|\, f^{(qc)}(t,\xi,v)\,| \;\leqslant\; A(t) \,+\, C_2$ für alle $(t,\xi,v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}$. ∎

Satz 2.14.:[33] *Wir betrachten eine Funktion* $f \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{K}}$ *und kompakte Teilmengen* $\Omega_c \subseteq \Omega$ *und* $\mathrm{A}_c \subset \mathbb{R}^n$, *so daß die Einschränkung* $f\,\big|\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ *bezüglich* (t,ξ,v) *stetig ist. Außerdem sei* $\Omega_a \subset \Omega$ *offen.*

1) Gegeben seien Funktionen $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *mit* $x(t) \in \mathrm{A}_c\ \forall\, t \in \Omega_c$ *und* $u \in L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R}^{nm})$ *mit* $u(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *einen Index* $K_0 \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\Big|\int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t,x(t),u(t)) \,-\, f^{(qc)}(t,\frac{K-1}{K}\,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\Big)\,dt\Big| \;\leqslant\; 7\,|\,\Omega_a \,\cap\, \Omega_c\,|\,\varepsilon \quad \forall\, K \geqslant K_0(\varepsilon)\,. \tag{2.42}$$

2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert ein Index* $K_1 \in \mathbb{N}$, *so daß für beliebige Funktionen* $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *mit* $x(t) \in \mathrm{A}_c\ \forall\, t \in \Omega_c$ *und* $u \in L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R}^{nm})$ *mit* $u(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$ *die Abschätzung*

$$\int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t,x(t),u(t)) \,-\, f^{(qc)}(t,\frac{K-1}{K}\,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\Big)\,dt \;\geqslant\; -8\,|\,\Omega_c\,|\,\varepsilon \quad \forall\, K \geqslant K_1(\varepsilon) \tag{2.43}$$

besteht. K_1 *hängt nur von* Ω_c, *nicht aber von* x *und* u *ab.*

Beweis: 1): Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t,x(t),u(t)) \,-\, f^{(qc)}(t,\frac{K-1}{K}\,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\Big)\,dt\Big|\\
&\leqslant \Big|\int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t,x(t),u(t)) \,-\, f^{(qc)}(t,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\Big)\,dt\Big| + \Big|\int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\\
&\quad -\, f^{(qc)}(t,\frac{K-1}{K}\,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\Big)\,dt\Big|\,.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

[33] Verallgemeinerung von [Wagner 07b], p. 12, Lemma 3.6.

Wegen Satz 2.13. darf auf den ersten Term der Konvergenzsatz von Lebesgue angewendet werden, woraus sich

$$\Big| \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x(t), u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big)\, dt \Big| \; \leqslant \; |\, \Omega_a \cap \Omega_c \,|\, \varepsilon \tag{2.45}$$

ergibt, sobald $K \geqslant K_0'(\varepsilon)$. Die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $f(t, \xi, v)$ auf der kompakten Menge $\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ werde wiederum durch die ε-δ-Relation (2.19) beschrieben. Mit Satz 2.11., 2) erhalten wir daraus eine gleichmäßige Stetigkeitsrelation für $f^{(qc)}(t, \xi, v) \,\big|\, \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K}\big)$:

$$\begin{aligned} \big|\, t' - t'' \,\big| \; + \; \big|\, \xi' - \xi'' \,\big| \; + \; \big|\, v' - v'' \,\big| \; \leqslant \; \delta_1(\varepsilon) \; = \; \frac{\delta_0(\varepsilon)}{4\, C_{\mathrm{K}}} \cdot \mathrm{Min}\big(1\,,\, \frac{c_{\mathrm{K}}}{K}\big) \; \Longrightarrow \\ \big|\, f^{(qc)}(t', \xi', v') - f^{(qc)}(t'', \xi'', v'') \,\big| \; \leqslant \; 6\,\varepsilon \quad \forall\, (t', \xi', v'),\, (t'', \xi'', v'') \in \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K}\big)\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Wählen wir $K \geqslant K_0''(\varepsilon)$ mit $\mathrm{Diam}\,(\mathrm{A}_c)/K_0''(\varepsilon) \leqslant \delta_1(\varepsilon)$, so folgt aus (2.46) für den zweiten Term in (2.44):

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, \frac{K-1}{K}\, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big)\, dt \Big| \\ &\leqslant \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big| f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, \frac{K-1}{K}\, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big|\, dt \; \leqslant \; 6\,|\, \Omega_a \cap \Omega_c \,|\, \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Für $K_0(\varepsilon) = \mathrm{Max}\big(K_0'(\varepsilon), K_0''(\varepsilon)\big)$ ergibt sich aus (2.45) und (2.47) die behauptete Ungleichung.

2): Wir zerlegen erneut:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x(t), u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, \frac{K-1}{K}\, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big)\, dt \\ &= \int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x(t), u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big)\, dt \; + \; \int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \\ &- \; f^{(qc)}(t, \frac{K-1}{K}\, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big)\, dt\,. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeitsrelation (2.19) für $f(t, \xi, v) \,\big|\, \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ folgt mit Satz 2.12., daß für

$$\mathrm{Dist}\,\big(u(t)\,,\, \frac{K-1}{K}\, u(t)\big) \; = \; \frac{|\, u(t) \,|}{K} \; \leqslant \; \frac{C_{\mathrm{K}}}{K} \; \leqslant \; \delta_0(\varepsilon) \cdot \frac{c_{\mathrm{K}}}{6\, C_{\mathrm{K}}}\,, \tag{2.49}$$

also für alle $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{K} \; \leqslant \; \frac{1}{K_1'(\varepsilon)} \; \leqslant \; \delta_0(\varepsilon) \cdot \frac{c_{\mathrm{K}}}{6\,(C_{\mathrm{K}})^2}\,, \tag{2.50}$$

die Abschätzung

$$f^{(qc)}(t, x(t), u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \; \geqslant \; -2\,\varepsilon \tag{2.51}$$

für alle $t \in \Omega_c$ besteht. Daraus erhalten wir:

$$\int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x(t), u(t)) \; - \; f^{(qc)}(t, x(t), \frac{K-1}{K}\, u(t)) \Big)\, dt \; \geqslant \; -2\,|\, \Omega_c \,|\, \varepsilon\,. \tag{2.52}$$

Für alle $K \geqslant K_1''(\varepsilon)$ mit $\mathrm{Diam}\,(\mathrm{A}_c)/K_1''(\varepsilon) \leqslant \delta_1(\varepsilon)$ ergibt sich aus der gleichmäßigen Stetigkeitsrelation (2.46) für $f^{(qc)}(t,\xi,v)\,\big|\,\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K}\big)$:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_c}\Big(f^{(qc)}(t,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t)) - f^{(qc)}(t,\frac{K-1}{K}\,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\Big)\,dt\\ &\geqslant -\int_{\Omega_c}\Big|\,f^{(qc)}(t,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t)) - f^{(qc)}(t,\frac{K-1}{K}\,x(t),\frac{K-1}{K}\,u(t))\,\Big|\,dt \geqslant -6\,|\,\Omega_c\,|\,\varepsilon\,,\end{aligned} \tag{2.53}$$

und durch Zusammenfassung von (2.52) und (2.53) ergibt sich für alle $K \geqslant K_1(\varepsilon) = \mathrm{Max}\,\big(K_1'(\varepsilon), K_1''(\varepsilon)\big)$ die behauptete Ungleichung. ∎

3. Der Relaxationssatz für Aufgaben (P) mit Integranden $f(t,\xi,v)$.

a) Beweis von Satz 1.2.

Wir schicken folgendes Lemma voraus:

Lemma 3.1.:[34] *Der zulässige Bereich $\mathcal{B}$ von* (P) *ist konvex und in $W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$-Norm beschränkt.*

Beweis: $\mathcal{B}$ ist zusammen mit K konvex. Die Beschränktheit von $\mathcal{B}$ folgt aus der Äquivalenz der Normen $\|\,x\,\|_1 = \|\,x\,\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|\,Jx\,\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})}$ und $\|\,x\,\|_2 = \|\,Jx\,\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})}$ auf $W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ (vergleiche [Dacorogna 04], p. 37, Theorem 1.47). ∎

Aus Lemma 3.1. folgt zusammen mit der Wachstumsbedingung d) aus Definition 1.1., 2) die Beschränktheit von F auf $\mathcal{B}$. Also ist der Minimalwert m von (P) endlich. Wir betrachten eine Minimalfolge $\{\,x^N\,\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ von (P). Die L^∞-normbeschränkten Folgen $\{\,x^N\,\}$ und $\{\,Jx^N\,\}$ müssen schwach*-konvergente Teilfolgen $\{\,x^{N'}\,\} \xrightarrow{*}{}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \hat{x}$ bzw. $\{\,Jx^{N'}\,\} \xrightarrow{*}{}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})} \hat{y}$ mit $\hat{y} = J\hat{x}$ enthalten. Aus [Dacorogna 04], p. 36, Corollary 1.45, folgt die Normkonvergenz $x^{N'} \to^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \hat{x}$, und daraus wegen der Stetigkeit der Funktionen die gleichmäßige Konvergenz $x^{N'} \to^{C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)} \hat{x}$. Die konvexe, beschränkte, normabgeschlossene Menge $\{\,z \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})\;\big|\;z(t) \in \mathrm{K}\;\;(\forall)\,t \in \Omega\,\}$ ist nach [Dunford/Schwartz 88], p. 429, Theorem 7, auch schwach*-abgeschlossen, woraus sich die Zulässigkeit von $\hat{x} \in \mathcal{B}$ ergibt.
Aus Voraussetzung b) folgt

$$F^{\#}(x^{N'}) \leqslant F(x^{N'}) \quad \forall\, N' \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

und mit c) erhalten wir

$$F^{\#}(\hat{x}) \leqslant \liminf_{N'\to\infty} F^{\#}(x^{N'}) \leqslant \liminf_{N'\to\infty} F(x^{N'}) = \lim_{N\to\infty} F(x^N) = m\,. \tag{3.2}$$

Bezeichnen wir schließlich den Minimalwert von $(\mathrm{P})^{\#}$ mit $m^{\#}$, so folgt aus d)

$$m^{\#} \leqslant F^{\#}(\hat{x}) \leqslant m = m^{\#}\,. \tag{3.3}$$

Also ist $\hat{x}$ eine globale Minimalstelle von $(\mathrm{P})^{\#}$, und Satz 1.2. ist vollständig bewiesen. ∎

b) Beweis des Relaxationssatzes 1.4.

Skizze: Wir haben zu zeigen, daß die bezüglich der Variablen v gebildete unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion $f^{(qc)}$ von $f \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{K}}$ die Bedingungen a) – d) von Satz 1.2. erfüllt. Wir beweisen das Zutreffen

[34] Vergleiche [Pickenhain/Wagner 00], p. 222, Lemma 2.1.

von a) und b) in Satz 3.2., die Unterhalbstetigkeit des relaxierten Zielfunktionals $F^{(qc)}$ in Satz 3.3. und die Übereinstimmung der Minimalwerte von (P) und $(\mathrm{P})^{(qc)}$ in Satz 3.8.

Satz 3.2. (Zutreffen der Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2. auf $f^{(qc)}$): *Wir betrachten die Aufgabe* (P) *unter den Voraussetzungen von Satz 1.4. Dann erfüllt die Funktion $f^{(qc)}$, die für festes $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ als unterhalbstetige quasikonvexe Hüllfunktion von f bezüglich der Variablen v und für $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \mathrm{N} \times \mathbb{R}^n$ durch Null definiert wird, die Eigenschaften a) und b) aus Satz 1.2.*

Beweis: Nach Satz 2.10., 1) besitzt $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},\,\cdot\,)$ für festes $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N}\big) \times \mathbb{R}^n$ den effektiven Definitionsbereich K. Nach Satz 2.10., 2) ist auch die Einschränkung $f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},\,\cdot\,)\,\big|\,\mathrm{K}$ auf die kompakte Menge K unterhalbstetig und damit insbesondere meßbar. Die Beschränktheit nach unten auf K ergibt sich wie im Beweis zu Satz 2.13., womit Bedingung a) erfüllt ist. Mit der Ungleichung

$$f^{(qc)}(\hat{t},\hat{\xi},v) \leqslant f(\hat{t},\hat{\xi},v) \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm} \tag{3.4}$$

aus Satz 2.10., 1) ist auch Bedingung b) erfüllt. ∎

Satz 3.3. (Unterhalbstetigkeit des Funktionals $F^{(qc)}(\,\cdot\,)$): *Wir betrachten erneut* (P) *unter den Voraussetzungen von Satz 1.4. Für alle Folgen in* (P) *zulässiger Funktionen $\{\,x^N\,\}$ mit $x^N \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}\, \hat{x}$ und $Jx^N \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})}\, J\hat{x}$ gilt:*

$$F^{(qc)}(\hat{x}) = \int_\Omega f^{(qc)}(t,\hat{x}(t),J\hat{x}(t))\,dt \leqslant \liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^{(qc)}(t,x^N(t),Jx^N(t))\,dt = \liminf_{N\to\infty} F^{(qc)}(x^N)\,. \tag{3.5}$$

Beweis: Der Beweis von Satz 3.3. wird in insgesamt acht Schritten erbracht.

• **Schritt 1:** *Anwendung des Satzes von Scorza-Dragoni auf die Carathéodory-Funktion $f \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{K}}$.* $\mathcal{B}$ bezeichnet wiederum den zulässigen Bereich von (P). Aus Lemma 3.1. folgt:

$$C_1 = \sup\big\{\,|\,x(t)\,|\;\big|\;x \in \mathcal{B}\,\big\} < (+\infty)\,. \tag{3.6}$$

Dann folgt aus der Wachstumsbedingung d) in Definition 1.1., 2):

$$C_2 = \sup\big\{\,B(\xi,v)\;\big|\;|\,\xi\,| \leqslant C_1\,,\;|\,v\,| \leqslant C_{\mathrm{K}}\,\big\} < (+\infty)\,. \tag{3.7}$$

Nun fixieren wir $\varepsilon > 0$. Dann können wir in bezug auf die integrable Funktion A aus der Wachstumsbedingung eine Zahl $C_3 \geqslant 1$ so groß wählen, daß mit der Menge

$$\Omega_a = \big\{\,t \in \mathrm{int}\,(\Omega)\;\big|\;A(t) < C_3\,\big\} \tag{3.8}$$

sowohl

$$\big|\,\Omega \setminus \Omega_a\,\big| \leqslant \varepsilon/C_2 \quad \text{als auch} \quad \int_{\Omega\setminus\Omega_a} A(t)\,dt \leqslant \varepsilon \tag{3.9}$$

gilt. Aus Lemma 3.1. ergibt sich, daß es beim Beweis der Unterhalbstetigkeit des Zielfunktionals genügt, die Einschränkung des ursprünglichen Integranden f auf die Menge $\Omega \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}$ mit $\mathrm{A}_c = \mathrm{K}(\mathfrak{o},C_1) \subset \mathbb{R}^n$ zu betrachten.[35] Wir wenden daher den Satz von Scorza-Dragoni (Satz 1.7.) auf die Einschränkung $f\,\big|\,\big(\Omega \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ an und finden eine kompakte Teilmenge $\Omega_c \subseteq \Omega$ mit

$$\big|\,\Omega \setminus \Omega_c\,\big| \leqslant \varepsilon/(C_2 + C_3)\,, \tag{3.10}$$

[35] Vergleiche auch [Marcellini/Sbordone 80], p. 251, Corollary 3.12.

so daß die weitere Einschränkung $f \,\big|\, \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$ bezüglich (t, ξ, v) stetig ist. Da $\big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big) \subset \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{K}$ kompakt ist, besteht sogar eine gleichmäßige Stetigkeitsrelation, die wir durch

$$\big|\, t' - t'' \,\big| + \big|\, \xi' - \xi'' \,\big| + \big|\, v' - v'' \,\big| \leqslant \delta_2(\varepsilon) \leqslant \delta_0(\varepsilon) \cdot \mathrm{Min}\,\big(\, 1\,,\, \frac{1}{3\,(C_1 + C_{\mathrm{K}})}\,\big) \quad \Longrightarrow \tag{3.11}$$
$$\big|\, f(t', \xi', v') - f(t'', \xi'', v'') \,\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, (t', \xi', v'),\, (t'', \xi'', v'') \in \big(\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \mathrm{K}\big)$$

beschreiben wollen. Aus der Stetigkeit von $A \,\big|\, \mathrm{int}\,(\Omega)$ folgt außerdem, daß Ω_a offen ist.

• **Schritt 2:** *Einschränkung von $F^{(qc)}(x)$ auf $\Omega_a \cap \Omega_c$.*

Lemma 3.4.: *Gegeben seien Funktionen $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $x(t) \in A_c$ $\forall\, t \in \Omega_c$ und $u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ mit $u(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$. Dann gilt:*

$$\Big|\int_\Omega f^{(qc)}(t, x(t), u(t))\, dt \,-\, \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, x(t), u(t))\, dt\Big| \leqslant 3\,\varepsilon\,. \tag{3.12}$$

Beweis: Mit Hilfe von Satz 2.13. erhalten wir:

$$\Big|\int_\Omega f^{(qc)}(t, x(t), u(t))\, dt \,-\, \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, x(t), u(t))\, dt\Big|$$
$$= \Big|\int_{\Omega_a \cap (\,\Omega \setminus \Omega_c\,)} f^{(qc)}(t, x(t), u(t))\, dt \,+\, \int_{\Omega \setminus \Omega_a} f^{(qc)}(t, x(t), u(t))\, dt\Big| \tag{3.13}$$
$$\leqslant \int_{\Omega_a \cap (\,\Omega \setminus \Omega_c\,)} \big|\, f^{(qc)}(\,...\,)\,\big|\, dt \,+\, \int_{\Omega \setminus \Omega_a} \big|\, f^{(qc)}(\,...\,)\,\big|\, dt \tag{3.14}$$
$$\leqslant \int_{\Omega_a \cap (\,\Omega \setminus \Omega_c\,)} \big(\, A(t) + C_2\,\big)\, dt \,+\, \int_{\Omega \setminus \Omega_a} \big(\, A(t) + C_2\,\big)\, dt \tag{3.15}$$
$$\leqslant \varepsilon \,+ 2\,\varepsilon \tag{3.16}$$

nach Definition von Ω_a und Ω_c. ∎

• **Schritt 3:** *Zerlegung der Integrale.* Wir betrachten eine Folge zulässiger Funktionen $\{\, x^N \,\}, \mathcal{B}$ mit $\{\, x^N \,\} \xrightarrow{\;*\;} {}^{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)}\, \hat{x}$ und $\{\, Jx^N \,\} \xrightarrow{\;*\;} {}^{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})}\, J\hat{x}$. Wie im Beweis zu Satz 1.2. folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz $x^N \to {}^{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)}\, \hat{x}$ und die Zulässigkeit von $\hat{x}$. Wir setzen:

$$y^N(t) \,=\, x^N(t) - \hat{x}(t) \quad \Longrightarrow \quad Jy^N(t) \,=\, Jx^N(t) - J\hat{x}(t)\,; \tag{3.17}$$
$$x^N \to {}^{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)}\, \hat{x} \quad \Longrightarrow \quad y^N \to {}^{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)}\, \mathfrak{o}\,; \tag{3.18}$$
$$Jx^N \xrightarrow{\;*\;} {}^{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})}\, J\hat{x} \quad \Longrightarrow \quad Jy^N \xrightarrow{\;*\;} {}^{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})}\, \mathfrak{o}; \tag{3.19}$$
$$Jx^N(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\ \ \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad J\hat{x}(t) + Jy^N(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\ \ \forall\, N \in \mathbb{N}\,, \tag{3.20}$$

und mit einem Index $K \in \mathbb{N}$, der unten in Schritt 4 fixiert wird:

$$z^N(t) = \frac{K-1}{K}\, y^N(t) \quad \Longrightarrow \quad Jz^N(t) = \frac{K-1}{K}\, Jy^N(t)\,; \tag{3.21}$$
$$\hat{z}(t) = \frac{K-1}{K}\, \hat{x}(t) \quad \Longrightarrow \quad J\hat{z}(t) = \frac{K-1}{K}\, J\hat{x}(t)\,; \tag{3.22}$$
$$y^N \to {}^{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)}\, \mathfrak{o} \quad \Longrightarrow \quad z^N \to {}^{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)}\, \mathfrak{o}\,; \tag{3.23}$$
$$Jy^N \xrightarrow{\;*\;} {}^{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})}\, \mathfrak{o} \quad \Longrightarrow \quad Jz^N \xrightarrow{\;*\;} {}^{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{nm})}\, \mathfrak{o}\,; \tag{3.24}$$
$$J\hat{x}(t) + Jy^N(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\ \ \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad J\hat{z}(t) + Jz^N(t) \in \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\ \ \forall\, N \in \mathbb{N}\,; \tag{3.25}$$
$$J\hat{x}(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad J\hat{z}(t) \in \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\,. \tag{3.26}$$

Nun zerlegen wir die Integrale wie folgt:

$$\int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, x^N(t), Jx^N(t))\, dt \;=\; \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, \hat{x}(t) + y^N(t), J\hat{x}(t) + Jy^N(t))\, dt$$

$$= J_1(N) \;+\; J_2(N) \;+\; J_3(N) \;+\; J_4(N) \;+\; J_5(N) \quad \text{mit} \tag{3.27}$$

$$J_1(N) \;=\; \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, \hat{x}(t) + y^N(t), J\hat{x}(t) + Jy^N(t)) - f^{(qc)}(t, \hat{z}(t) + y^N(t), J\hat{z}(t) + Jz^N(t)) \Big)\, dt\,; \tag{3.28}$$

$$J_2(N) \;=\; \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, \hat{z}(t) + y^N(t)), J\hat{z}(t) + Jz^N(t)) - f^{(qc)}(t, \hat{z}(t), J\hat{z}(t) + Jz^N(t)) \Big)\, dt\,; \tag{3.29}$$

$$J_3(N) \;=\; \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, \hat{z}(t), J\hat{z}(t) + Jz^N(t))\, dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t))\, dt\,; \tag{3.30}$$

$$J_4(N) \;=\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \mathrm{Q}_s} \Big(f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t))\, dt \;-\; f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + J\big(\,\varphi_s(t) \cdot z^N(t)\,\big)\,)\Big)\, dt \tag{3.31}$$

$$J_5(N) \;=\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + \big(\,\varphi_s(t) \cdot Jz^N(t) + \nabla\varphi_s(t)^{\mathrm{T}}\, z^N(t)\,\big)\,)\, dt\,. \tag{3.32}$$

Die Wahl der Größen $K \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Q}_s \subset \Omega_a$, $t_s \in \mathrm{Q}_s$, $[\,\hat{z}\,]_s \in \mathbb{R}^n$, $[\,J\hat{z}\,]_s \in \mathbb{R}^{nm}$ und $\varphi_s \in C_0^\infty(\mathrm{Q}_s, \mathbb{R}^n)$ wird bei der Behandlung der einzelnen Terme in den folgenden Schritten erläutert.

• **Schritt 4:** *Untersuchung von $J_1(N)$ und $J_2(N)$.* Wir wenden Satz 2.14. an und finden zum gegebenen $\varepsilon > 0$ Zahlen $K_0(\varepsilon)$ und $K_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big| \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, \frac{K-1}{K}\,\hat{x}(t), \frac{K-1}{K}\,J\hat{x}(t)) \;-\; f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t)) \Big)\, dt \Big| \;\leqslant\; 7\,|\,\Omega_a \,\cap\, \Omega_c\,|\,\varepsilon \;\; \forall\, K \geqslant K_0(\varepsilon) \tag{3.33}$$

und

$$\int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, x^N(t), Jx^N(t)) \;-\; f^{(qc)}(t, \frac{K-1}{K}\,x^N(t), \frac{K-1}{K}\,Jx^N(t)) \Big)\, dt \tag{3.34}$$

$$= \int_{\Omega_c} \Big(f^{(qc)}(t, \hat{x}(t) + y^N(t), J\hat{x}(t) + Jy^N(t)) \;-\; f^{(qc)}(t, \hat{z}(t) + y^N(t), J\hat{z}(t) + \; Jz^N(t)) \Big)\, dt \;\geqslant\; -8\,\varepsilon\,\big|\,\Omega_c\,\big|$$

für alle $K \geqslant K_1(\varepsilon)$ und alle $N \in \mathbb{N}$. Wir fixieren ein $K \geqslant \mathrm{Max}\big(\,K_0(\varepsilon)\,,\, K_1(\varepsilon)\,\big)$. Dann folgt mit Satz 2.13. für beliebiges $N \in \mathbb{N}$:

$$\Big| \int_{\Omega_c \setminus \Omega_a} \Big(f^{(qc)}(t, \hat{x}(t) + y^N(t), J\hat{x}(t) + Jy^N(t)) - f^{(qc)}(t, \hat{z}(t) + y^N(t), J\hat{z}(t) + Jy^N(t)) \Big)\, dt \Big|$$

$$\leqslant \int_{\Omega_c \setminus \Omega_a} \big|\, f^{(qc)}(t, \hat{x}(t) + y^N(t), J\hat{x}(t) + Jy^N(t))\,\big|\, dt \;+\; \int_{\Omega_c \setminus \Omega_a} \big|\, f^{(qc)}(t, \hat{z}(t) + y^N(t), J\hat{z}(t) + Jz^N(t))\,\big|\, dt$$

$$\leqslant\; 2 \int_{\Omega_c \setminus \Omega_a} \big(\,A(t) + C_2\,\big)\, dt \;\leqslant\; 2 \int_{\Omega \setminus \Omega_a} \big(\,A(t) + C_2\,\big)\, dt \;\leqslant\; 4\,\varepsilon\,. \tag{3.35}$$

Zusammen erhalten wir

$$J_1(N) \;=\; \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} \Big(\;\ldots\;\Big)\, dt \;=\; \int_{\Omega_c} \Big(\;\ldots\;\Big)\, dt \;-\; \int_{\Omega_c \setminus \Omega_a} \Big(\;\ldots\;\Big)\, dt \;\geqslant\; \int_{\Omega_c} \Big(\;\ldots\;\Big)\, dt \;-\; \Big| \int_{\Omega_c \setminus \Omega_a} \Big(\;\ldots\;\Big)\, dt \Big| \quad \Longrightarrow \tag{3.36}$$

$$\liminf_{N \to \infty} J_1(N) \;\geqslant\; -\big(\,8\,|\,\Omega_c\,| + 4\,\big)\,\varepsilon\,. \tag{3.37}$$

Nach Satz 2.11., 2) ist die Funktion $f^{(qc)}(t,\xi,v)\,\big|\,\big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K}\,\big)$ bezüglich (t,ξ,v) gleichmäßig stetig. Aus der gleichmäßigen Konvergenz $y^N \to^{C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)} \mathfrak{o}$ folgt dann

$$\liminf_{N\to\infty} J_2(N) \;=\; \lim_{N\to\infty} J_2(N) \;=\; 0\,. \tag{3.38}$$

• **Schritt 5:** *Untersuchung von* $J_3(N)$. Die gleichmäßige Stetigkeit von $f^{(qc)}(t,\xi,v)$ auf $\big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times (1-\frac{1}{2K})\,\mathrm{K}\,\big)$ wird wegen (2.37), (2.38) und

$$\mathrm{Min}\,\big(\,1\,,\,\mathrm{Dist}\,\big(\,(1-\frac{1}{2K})\,\mathrm{K}\,,\,\partial\mathrm{K}\big)\big) \;=\; \mathrm{Min}\,\big(\,1\,,\,\frac{c_{\mathrm{K}}}{2K}\,\big) \;\geqslant\; \mathrm{Min}\,\big(\,\varepsilon\,,\,1\,,\,\frac{c_{\mathrm{K}}}{2K}\,,\,\frac{\mathrm{Diam}\,(\mathrm{A}_c)}{2K}\,\big) \tag{3.39}$$

durch die Relation

$$\big|\,t'-t''\,\big| + \big|\,\xi'-\xi''\,\big| + \big|\,v'-v''\,\big| \;\leqslant\; \delta_3(\varepsilon) \;=\; \frac{\delta_2(\varepsilon)}{4\,C_{\mathrm{K}}}\cdot \mathrm{Min}\,\big(\,\varepsilon\,,\,1\,,\,\frac{c_{\mathrm{K}}}{2K}\,,\,\frac{\mathrm{Diam}\,(\mathrm{A}_c)}{2\,K}\,\big) \;\Longrightarrow \tag{3.40}$$
$$\big|\,f^{(qc)}(t',\xi',v') - f^{(qc)}(t'',\xi'',v'')\,\big| \;\leqslant\; 6\,\varepsilon \quad \forall\,(t',\xi',v'),\,(t'',\xi'',v'') \in \big(\,\Omega_c \times \mathrm{A}_c \times (1-\frac{1}{2K})\,\mathrm{K}\,\big)$$

beschrieben. Im Hinblick auf den Beweis von Satz 3.8. unten benutzen wir

$$\delta_4(\varepsilon) \;=\; \mathrm{Min}\,\Big(\,\big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2\,,\,\delta_3(\varepsilon)\,\Big) \tag{3.41}$$

und wenden Lemma 1.8. auf die offene Menge $\Omega_a \subset \mathbb{R}^m$, die Funktionen $\hat{z}$ und $J\hat{z}$ und die Zahlen

$$\eta \;=\; \delta \;=\; \mathrm{Min}\,\Big(\,\varepsilon\,,\,\frac{\delta_4(\varepsilon)}{3\sqrt{m}}\,,\,\frac{\delta_4(\varepsilon)}{3\sqrt{n}}\,,\,\frac{\delta_4(\varepsilon)}{3\sqrt{nm}}\,,\,\frac{c_{\mathrm{K}}}{2\,nm\,K}\,\Big) \tag{3.42}$$

an. Wir finden endlich viele paarweise disjunkte abgeschlossene Würfel $\mathrm{Q}_s \subset \Omega_a$ mit Kantenlänge kleiner oder gleich $\frac{1}{3\sqrt{m}}\,\delta_4(\varepsilon)$ und

$$\Big|\,\Omega_a \setminus \bigcup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s\,\Big| \;\leqslant\; \varepsilon\,; \tag{3.43}$$

$$\Big|\,\hat{z}_i(t) \;-\; \frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \hat{z}_i(\tau)\,d\tau\,\Big| \;\leqslant\; \frac{\delta_4(\varepsilon)}{3\sqrt{n}} \quad (\forall)\,t \in \mathrm{Q}_s\,,\;1 \leqslant s \leqslant r\,,\;1 \leqslant i \leqslant n\,; \tag{3.44}$$

$$\Big|\,\frac{\partial \hat{z}_i(t)}{\partial t_j} \;-\; \frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \frac{\partial \hat{z}_i(\tau)}{\partial t_j}\,d\tau\,\Big| \;\leqslant\; \frac{\delta_4(\varepsilon)}{3\sqrt{nm}} \quad (\forall)\,t \in \mathrm{Q}_s\,,\;1 \leqslant s \leqslant r\,,\;1 \leqslant i \leqslant n\,,\;1 \leqslant j \leqslant m\,. \tag{3.45}$$

Nun wählen wir Punkte $t_s \in \mathrm{Q}_s \setminus \mathrm{N}$ so, daß aus $\big(\,\mathrm{Q}_s \cap \Omega_c\,\big) \setminus \mathrm{N} \neq \emptyset$ folgt: $t_s \in \big(\,\mathrm{Q}_s \cap \Omega_c\,\big) \setminus \mathrm{N}$. Aus der Konvexität des Integrals (vergleiche [Bourbaki 52], Chap. IV, § 6, p. 204, Corollaire) folgt außerdem

$$[\,\hat{z}\,]_s \;=\; \Big(\,\frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \hat{z}_1(\tau)\,d\tau\,,\,\ldots\,,\,\frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \hat{z}_n(\tau)\,d\tau\,\Big)^{\mathrm{T}} \;\in\; \frac{K-1}{K}\,\mathrm{A}_c \quad \text{sowie} \tag{3.46}$$

$$[\,J\hat{z}\,]_s \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial t_1}(t)\,dt & \ldots & \frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial t_m}(t)\,dt \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \frac{\partial \hat{z}_n}{\partial t_1}(t)\,dt & \ldots & \frac{1}{|\,\mathrm{Q}_s\,|}\int_{\mathrm{Q}_s} \frac{\partial \hat{z}_n}{\partial t_m}(t)\,dt \end{pmatrix} \;\in\; \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K} \tag{3.47}$$

für alle $1 \leqslant s \leqslant r$. Weiter folgt:

$$\big|\,t-t_s\,\big| \;\leqslant\; \frac{\delta_4(\varepsilon)}{3} \quad \forall\,t \in \mathrm{Q}_s\,; \quad \big|\,\hat{z}(t) - [\,\hat{z}\,]_s\,\big| \;\leqslant\; \frac{\delta_4(\varepsilon)}{3} \quad \forall\,t \in \mathrm{Q}_s\,; \tag{3.48}$$

$$\big|\,J\hat{z}(t) - [\,J\hat{z}\,]_s\,\big| \;\leqslant\; \mathrm{Min}\,\Big(\,\frac{\delta_4(\varepsilon)}{3}\,,\,\frac{c_{\mathrm{K}}}{2K}\,\Big) \quad (\forall)\,t \in \mathrm{Q}_s \tag{3.49}$$

sowie (3.50)

$$[\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t) \;=\; J\hat{z}(t) + Jz^N(t) + \big(\,[\,J\hat{z}\,]_s - J\hat{z}(t)\,\big) \;\in\; \frac{K-1}{K}\,\mathrm{K} + \mathrm{K}(\mathfrak{o}_{nm}, \frac{c_{\mathrm{K}}}{2K}) \;\subseteq\; \frac{2K-1}{2K}\,\mathrm{K} \quad (\forall)\, t \in \mathrm{Q}_s\,,$$

woraus sich insbesondere $f^{(qc)}(\,t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t)\,) < (+\infty)$ für fast alle $t \in \mathrm{Q}_s$ ergibt. Dann gilt für fast alle $t \in \mathrm{Q}_s$ und $1 \leqslant s \leqslant r$:

$$\big|\,t - t_s\,\big| \;+\; \big|\,\hat{z}(t) - [\,\hat{z}\,]_s\,\big| \;+\; \big|\,J\hat{z}(t) - [\,J\hat{z}\,]_s\,\big| \;\leqslant\; \delta_4(\varepsilon)\,, \tag{3.51}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
J_3(N) \;=\; & \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\,\setminus\, \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t, \hat{z}(t), J\hat{z}(t) + Jz^N(t))\,dt \\
& + \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big(f^{(qc)}(t, \hat{z}(t), J\hat{z}(t) + Jz^N(t)) \;-\; f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t)) \Big)\,dt \\
& - \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t))\,dt
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\geqslant -\int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\setminus \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big|\,f^{(qc)}(\,\ldots\,)\,\big|\,dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt \;-\; \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big|\,f^{(qc)}(\,\ldots\,)\,\big|\,dt \tag{3.53}$$

$$\geqslant -\int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\setminus \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big(\,A(t) + C_2\,\big)\,dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt \;-\; \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big(\,A(t) + C_2\,\big)\,dt \tag{3.54}$$

$$\geqslant -\int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\setminus \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt \;-\; \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big(\,C_2 + C_3\,\big) \tag{3.55}$$

$$\geqslant -\int_{\Omega_a \setminus \cup_{s=1}^r \mathrm{Q}_s} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega \setminus \Omega_c} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt \tag{3.56}$$

$$\geqslant -\varepsilon\,\big(\,C_2 + C_3\,\big) \;-\; 6\,\varepsilon\,\big|\,\Omega_a\,\big| \;-\; \varepsilon \quad \Longrightarrow \tag{3.57}$$

$$\liminf_{N\to\infty} J_3(N) \;\geqslant\; -\big(\,6\,|\,\Omega_a\,| + C_2 + C_3 + 1\,\big)\,\varepsilon\,. \tag{3.58}$$

• **Schritt 6:** *Untersuchung von $J_4(N)$ und $J_5(N)$.* Um die Quasikonvexität von $f^{(qc)}$ ausnutzen zu können, müssen wir die Werte der z^N auf den Rändern $\partial\mathrm{Q}_s$ der Würfel zu Null abändern. Das geschieht wie folgt: Wir wählen jeweils einen abgeschlossenen Würfel $\mathrm{Q}_s^0 \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{Q}_s)$ mit demselben Mittelpunkt wie Q_s und $|\,\mathrm{Q}_s \setminus \mathrm{Q}_s^0\,| \leqslant \varepsilon \cdot |\,\mathrm{Q}_s\,|$. Es sei $\mathrm{Dist}\,(\partial\mathrm{Q}_s^0\,,\,\partial\mathrm{Q}_s) = \kappa_s$. Weiterhin definieren wir Funktionen $\varphi_s \in C^\infty(\mathrm{Q}_s, \mathbb{R})$ mit

$$\varphi_s(t) \begin{cases} = 1 & \big|\; t \in \mathrm{Q}_s^0; \\ \in [\,0\,,\,1\,] & \big|\; t \in \mathrm{Q}_s \setminus \mathrm{Q}_s^0; \\ = 0 & \big|\; t \in \partial\mathrm{Q}_s \end{cases} \tag{3.59}$$

sowie $|\,\nabla\varphi_s(t)\,| \leqslant C_6/\kappa_s \leqslant \mathrm{Max}_{\,1\leqslant s\leqslant r}\big(\,C_6/\kappa_s\,\big)$ mit einer Konstanten $C_6 > 0$. Wir untersuchen zunächst die Argumente

$$[\,J\hat{z}\,]_s \;+\; \varphi_s(t)\cdot Jz^N(t) \;+\; \nabla\varphi_s(t)^{\mathrm{T}}\,z^N(t)\,. \tag{3.60}$$

Nach Schritt 5 liegen sowohl $[\,J\hat{z}\,]_s$ als auch $[\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t)$ für fast alle $t \in \Omega$ in $\frac{2K-1}{2K}\,\mathrm{K}$. Wegen $0 \leqslant \varphi_s(t) \leqslant 1$ folgt daraus:

$$[\,J\hat{z}\,]_s \,+\, \varphi_s(t)\cdot Jz^N(t) \,\in\, \big[\,[\,J\hat{z}\,]_s\,,\,[\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t)\,\big] \,\subset\, \frac{2K-1}{2K}\,\mathrm{K} \tag{3.61}$$

für fast alle $t \in \Omega$. Außerdem gilt mit einer weiteren Konstante $C_7 > 0$:

$$\big|\,\nabla\varphi_s(t)^{\mathrm{T}}\,z^N(t)\,\big| \,\leqslant\, C_7\cdot\big|\,\nabla\varphi_s(t)\,\big|\cdot\|\,z^N\,\|_{C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)} \,\leqslant\, \operatorname*{Max}_{1\leqslant s\leqslant r}\frac{C_6\,C_7}{\kappa_s}\cdot\|\,z^N\,\|_{C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.62}$$

Wegen $z^N \to^{C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)} \mathfrak{o}$ gilt für alle hinreichend großen $N \geqslant N_0(\varepsilon)$

$$\big|\,\nabla\varphi_s(t)^{\mathrm{T}}\,z^N(t)\,\big| \,\leqslant\, \frac{c_{\mathrm{K}}}{4K} \tag{3.63}$$

und

$$[\,J\hat{z}\,]_s \,+\, \varphi_s(t)\cdot Jz^N(t) \,+\, \nabla\varphi_s(t)^{\mathrm{T}}\,z^N(t) \,\in\, \frac{2K-1}{2K}\,\mathrm{K} \,+\, \mathrm{K}(\mathfrak{o}_{nm},\frac{c_{\mathrm{K}}}{4K}) \subseteq \frac{4K-1}{4K}\,\mathrm{K}\,. \tag{3.64}$$

Daraus ergibt sich für alle $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ und alle $1 \leqslant s \leqslant r$ und für fast alle $t \in \Omega$:

$$f^{(qc)}\big(\,t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s \,+\, \varphi_s(t)\cdot Jz^N(t) \,+\, \nabla\varphi_s(t)^{\mathrm{T}}\,z^N(t)\,\big) \,<\, (+\infty)\,. \tag{3.65}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_a\,\cap\,\mathrm{Q}_s}\Big(\,f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t)) \,-\, f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + J\big(\,\varphi_s(t)\cdot z^N(t)\,\big)\,)\Big)\,dt \qquad (3.66)\\ &= \int_{\Omega_a\,\cap\,(\,\mathrm{Q}_s\,\setminus\,\mathrm{Q}_s^0\,)}\Big(\,\ldots\,\Big) \,\geqslant\, -\int_{\mathrm{Q}_s\,\setminus\,\mathrm{Q}_s^0}\Big|\,\ldots\,\Big| \,\geqslant\, -2\int_{\mathrm{Q}_s\,\setminus\,\mathrm{Q}_s^0}\big(\,A(t)+C_2\,\big)\,dt \,\geqslant\, -2\,\varepsilon\,\big|\,\mathrm{Q}_s\,\big|\,\big(\,C_2+C_3\,\big)\end{aligned}$$

für alle $1 \leqslant s \leqslant r$. Zusammen ergibt sich: (3.67)

$$\begin{aligned}J_4(N) \,=\, \sum_s\int_{\Omega_a\,\cap\,\mathrm{Q}_s}&\Big(\,f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + Jz^N(t)) \,-\, f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + J\big(\,\varphi_s(t)\cdot z^N(t)\,\big)\,)\Big)\,dt\\ &\geqslant\, -2\,\varepsilon\sum_s\big|\,\mathrm{Q}_s\,\big|\,\big(\,C_2+C_3\,\big) \,\geqslant\, -2\,\varepsilon\,\big|\,\Omega_a\,\big|\,\big(\,C_2+C_3\,\big) \quad\Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\liminf_{N\to\infty}\,J_4(N) \,\geqslant\, -2\,\varepsilon\,\big|\,\Omega_a\,\big|\,\big(\,C_2+C_3\,\big)\,. \tag{3.68}$$

Aus der Quasikonvexität der Funktionen $f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,\,\cdot\,)$ (Satz 2.10., 2)) folgt schließlich für alle $1 \leqslant s \leqslant r$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega}\Big(\,f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + J\big(\,\varphi_s(t)\cdot z^N(t)\,\big)\,) \,-\, f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s\,)\Big)\,dt \qquad (3.69)\\ &\qquad = \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_a\,\cap\,\mathrm{Q}_s}\Big(\,f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + J\big(\,\varphi_s(t)\cdot z^N(t)\,\big)\,) \,-\, f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s\,)\Big)\,dt \,\geqslant\, 0\end{aligned}$$

und daraus

$$J_5(N) \,=\, \sum_s\int_{\Omega_a\,\cap\,\mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + J\big(\,\varphi_s(t)\cdot z^N(t)\,\big)\,)\,dt \tag{3.70}$$

$$\geqslant\, \sum_s\int_{\Omega_a\,\cap\,\mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s)\,dt \tag{3.71}$$

und

$$\liminf_{N\to\infty} J_5(N) \geqslant \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt\,. \tag{3.72}$$

• **Schritt 7:** *Zusammenfassung der Schritte 2 – 6.*

Lemma 3.5.: *Es gilt*

$$\liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^{(qc)}(t, x^N(t), Jx^N(t))\, dt \geqslant \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt \,-\, C_4\,\varepsilon \tag{3.73}$$

mit $C_4 \,=\, (2\,C_2 + 2\,C_3 + 6)\,|\,\Omega_a\,| + 8\,|\,\Omega_c\,| + C_2 + C_3 + 5.$

Beweis: Aus Lemma 3.4. und (3.27) folgt:

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^{(qc)}(t, x^N(t), Jx^N(t))\, dt &\geqslant \liminf_{N\to\infty} \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, x^N(t), Jx^N(t))\, dt \,-\, 3\,\varepsilon \\ &\geqslant \liminf_{N\to\infty} J_1(N) + \liminf_{N\to\infty} J_2(N) + \liminf_{N\to\infty} J_3(N) + \liminf_{N\to\infty} J_4(N) + \liminf_{N\to\infty} J_5(N) \,-\, 3\,\varepsilon\,.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Aus den Schritten 4 – 6 ergibt sich mit (3.37), (3.38), (3.58), (3.68) und (3.71):

$$\begin{aligned}&\liminf_{N\to\infty} J_1(N) + \liminf_{N\to\infty} J_2(N) + \liminf_{N\to\infty} J_3(N) + \liminf_{N\to\infty} J_4(N) + \liminf_{N\to\infty} J_5(N) \\ &\quad\geqslant -\big(\,8\,|\,\Omega_c\,| + 4\,\big)\,\varepsilon \,-\, \big(\,6\,|\,\Omega_a\,| + C_2 + C_3 + 1\,\big)\,\varepsilon \,-\, 2\,\varepsilon\,\big|\,\Omega_a\,\big|\,\big(\,C_3 + C_2\,\big) \\ &\quad+ \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt\,,\end{aligned} \tag{3.75}$$

also zusammen

$$\liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^{(qc)}(t, x^N(t), Jx^N(t))\, dt \geqslant \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt \,-\, C_4\,\varepsilon\,. \quad \blacksquare \tag{3.76}$$

• **Schritt 8:** *Abschluß des Beweises.*

Lemma 3.6.: *Es gilt:*

$$\Big|\int_\Omega f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t))\, dt \,-\, \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt\Big| \leqslant C_5\,\varepsilon \tag{3.77}$$

mit $C_5 = 6\,|\,\Omega_a\,| + 7\,|\,\Omega_a \,\cap\, \Omega_c\,| + C_2 + C_3 + 4.$

Beweis: Wir zerlegen:

$$\int_\Omega f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t))\, dt \,-\, \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt \,=\, J_6 \,+\, J_7 \,+\, J_8 \quad \text{mit} \tag{3.78}$$

$$J_6 \,=\, \int_\Omega f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t))\, dt \,-\, \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t))\, dt\,; \tag{3.79}$$

$$J_7 \,=\, \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t))\, dt \,-\, \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, \hat{z}(t), J\hat{z}(t))\, dt\,; \tag{3.80}$$

$$J_8 \,=\, \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f^{(qc)}(t, \hat{z}(t), J\hat{z}(t)) \,-\, \sum_s \int_{\Omega_a \cap Q_s} f^{(qc)}(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s)\, dt\,. \tag{3.81}$$

Aus Lemma 3.4. folgt $|\,J_6\,| \leqslant 3\,\varepsilon$, und bei der Definition von $\hat{z}$ wurde der Index K so gewählt, daß die Ungleichung (3.33) besteht, woraus sich $|\,J_7\,| \leqslant 7\,|\,\Omega_a \cap \Omega_c\,|\,\varepsilon$ ergibt. Bei der Abschätzung von J_8 erhalten wir mit Hilfe von (3.51) analog zu (3.58):

$$\begin{aligned} J_8 \;=\; & \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\,\setminus\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t,\hat{z}(t),J\hat{z}(t))\,dt \\ & + \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big(f^{(qc)}(t,\hat{z}(t),J\hat{z}(t)) \;-\; f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s) \Big)\,dt \\ & - \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,)\,\cap\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s)\,dt \quad \Longrightarrow \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$|\,J_8\,| \leqslant \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\,\setminus\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} |\,f^{(qc)}(\,\ldots\,)\,|\,dt + \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt + \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,)\,\cap\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} |\,f^{(qc)}(\,\ldots\,)\,|\,dt \tag{3.83}$$

$$\leqslant \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\,\setminus\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} \big(\,A(t) + C_2\,\big)\,dt + \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt + \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,)\,\cap\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} \big(\,A(t) + C_2\,\big)\,dt \tag{3.84}$$

$$\leqslant \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,)\,\setminus\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt + \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt + \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,)\,\cap\,\cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt \tag{3.85}$$

$$\leqslant \int_{\Omega_a \setminus \cup_{s=1}^{r}\,\mathrm{Q}_s} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt + \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big|\,\ldots\,\Big|\,dt + \sum_s \int_{\Omega \setminus \Omega_c} \big(\,C_2 + C_3\,\big)\,dt \tag{3.86}$$

$$\leqslant (C_2 + C_3)\,\varepsilon \;+\; 6\,|\,\Omega_a\,|\,\varepsilon \;+\; \varepsilon\,. \tag{3.87}$$

Zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \Big|\int_\Omega f^{(qc)}(t,\hat{x}(t),J\hat{x}(t))\,dt \;-\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s)\,dt\Big| \;\leqslant\; |\,J_6\,| + |\,J_7\,| + |\,J_8\,| \\ & \leqslant\; 3\,\varepsilon \;+\; |\,\Omega_a \cap \Omega_c\,|\,\varepsilon \;+\; \big(\,6\,|\,\Omega_a\,| \;+\; C_2 \;+\; C_3 \;+\; 1\,\big)\,\varepsilon\,. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{3.88}$$

Wir fassen zuletzt die Lemmata 3.5. und 3.6. zusammen und erhalten:

$$\liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^{(qc)}(t,x^N(t),Jx^N(t))\,dt \;\geqslant\; \int_\Omega f^{(qc)}(t,\hat{x}(t),J\hat{x}(t))\,dt \;-\; \big(\,C_4 + C_5\,\big)\,\varepsilon\,. \tag{3.89}$$

Da weder C_4 noch C_5 von ε abhängen, ergibt sich hieraus die behauptete Unterhalbstetigkeitsrelation

$$\int_\Omega f^{(qc)}(t,\hat{x}(t),J\hat{x}(t))\,dt \;\leqslant\; \liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^{(qc)}(t,x^N(t),Jx^N(t))\,dt\,, \tag{3.90}$$

und der Beweis von Satz 3.3. ist beendet. ■

Korollar 3.7.: *Die Aufgabe* $(\mathrm{P})^{(qc)}$ *besitzt eine globale Minimalstelle* $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Der zulässige Bereich der Aufgabe $(\mathrm{P})^{(qc)}$ stimmt mit dem zulässigen Bereich $\mathcal{B}$ von (P) überein. Damit ergibt sich aus Lemma 3.1. und Satz 2.13. die Beschränktheit von $F^{(qc)}$ auf $\mathcal{B}$:

$$|\,F^{(qc)}(x)\,| \;\leqslant\; \int_\Omega |\,f^{(qc)}(t,x(t),Jx(t))\,|\,dt \;\leqslant\; \|\,A\,\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R})} \;+\; C_2 \cdot |\,\Omega\,| \;<\; (+\infty)\,. \tag{3.91}$$

Also existiert für $(\mathrm{P})^{(qc)}$ eine Minimalfolge $\{\, x^N \,\}$, $W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, über die wir — analog zum Beweis von Satz 1.2. — von vornherein $\{\, x^N \,\} \xrightarrow{*} {}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \hat{x}$ und $\{\, Jx^N \,\} \xrightarrow{*} {}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{nm})} J\hat{x}$ mit $\hat{x} \in \mathcal{B}$ voraussetzen dürfen. Bezeichnen wir den (endlichen) Minimalwert von $(\mathrm{P})^{(qc)}$ mit $m^{(qc)}$, so folgt aus Satz 3.3.:

$$m^{(qc)} \leqslant F^{(qc)}(\hat{x}) \leqslant \liminf_{N\to\infty} F^{(qc)}(x^N) = \lim_{N\to\infty} F^{(qc)}(x^N) = m^{(qc)}\,, \tag{3.92}$$

und $\hat{x}$ ist globale Minimalstelle von $(\mathrm{P})^{(qc)}$. ∎.

Satz 3.8. (Übereinstimmung der Minimalwerte von (P) **und** $(\mathrm{P})^{(qc)}$**):** *Die Aufgaben* (P) *und* $(\mathrm{P})^{(qc)}$ *besitzen jeweils globale Minimalstellen, und ihre Minimalwerte stimmen überein.*

Beweis: Sei $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ eine globale Minimalstelle von $(\mathrm{P})^{(qc)}$ (eine solche existiert gemäß Korollar 3.7.). Wir haben zu zeigen, daß

$$F^{(qc)}(\hat{x}) = \int_\Omega f^{(qc)}(t,\hat{x}(t),J\hat{x}(t))\,dt \tag{3.93}$$

beliebig genau mit Ausdrücken

$$F(x) = \int_\Omega f(t,x(t),Jx(t))\,dt \tag{3.94}$$

mit in (P) zulässigen Funktionen $x \in \mathcal{B}$ approximiert werden kann. Sei dazu $\varepsilon > 0$ fixiert. Wir stellen für $1 \leqslant s \leqslant r$ die folgenden Integrale gemäß Satz 2.5. dar:

$$\int_{\Omega_a \cap \mathrm{Q}_s} f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s)\,dt = |\,\mathrm{Q}_s\,| \cdot f^{(qc)}(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathrm{Q}_s} f(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s^N(t))\,dt\,, \tag{3.95}$$

worin $w_s^N \in W_0^{1,\infty}(\mathrm{Q}_s,\mathbb{R}^n)$, $[\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s^N(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$ und $\lim_{N\to\infty} \|\, w_s^N \,\|_{C^0(\mathrm{Q}_s,\mathbb{R}^n)} = 0$ vorausgesetzt werden darf (vergleiche Beweis zu Lemma 3.1.). Wir können daher Funktionen $w_s \in W_0^{1,\infty}(\mathrm{Q}_s,\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften finden:

$$[\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t) \in \mathrm{K} \quad (\forall)\, t \in \Omega\,; \tag{3.96}$$

$$\|\, w_s \,\|_{C^0(\mathrm{Q}_s,\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{\delta_4(\varepsilon)}{3}\,; \tag{3.97}$$

$$\Big|\int_{\mathrm{Q}_s} \Big(f(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s) - f(t_s,[\,\hat{z}\,]_s,[\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t)) \Big)\,dt \Big| \leqslant \varepsilon\,. \tag{3.98}$$

Aus $|\,\hat{z}(t) - [\,\hat{z}\,]_s\,| \leqslant \delta_4(\varepsilon)/3$ $\forall\, t \in \mathrm{Q}_s$ folgt wegen $\delta_4(\varepsilon) \leqslant \mathrm{Diam}\,(\mathrm{A}_c)/(2K)$:

$$\hat{z}(t) + w_s(t) \in \frac{K-1}{K}\,\mathrm{A}_c + \mathrm{K}(\mathfrak{o},\frac{\delta_4(\varepsilon)}{3}) + \mathrm{K}(\mathfrak{o},\frac{\delta_4(\varepsilon)}{3}) \quad\Longrightarrow\quad \hat{z}(t) + w_s(t) \in \mathrm{A}_c\,. \tag{3.99}$$

Weiterhin folgt aus $|\,J\hat{z}(t) - [\,J\hat{z}\,]_s\,| \leqslant \delta_4(\varepsilon)/3 \leqslant \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2$ $(\forall)\, t \in \mathrm{Q}_s$:

$$J\hat{z}(t) + Jw_s(t) \in \frac{c_\mathrm{K} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}{c_\mathrm{K}}\,\mathrm{K} \tag{3.100}$$

für fast alle $t \in \mathrm{Q}_s$ und alle $1 \leqslant s \leqslant r$, also

$$\frac{c_\mathrm{K}}{c_\mathrm{K} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}\big(\,J\hat{z}(t) + Jw_s(t)\,\big) \in \mathrm{K} \tag{3.101}$$

für fast alle $t \in \mathrm{Q}_s$ und alle $1 \leqslant s \leqslant r$. Wir fassen die w_s in einer Funktion $w \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gemäß

$$w(t) \;=\; \sum_{s=1}^{r} \mathbb{1}_{\mathrm{Q}_s}(t)\, w_s(t) \tag{3.102}$$

zusammen und untersuchen die Differenz

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f\Big(t, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\hat{z}(t) + w(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(J\hat{z}(t) + Jw(t))\Big)\, dt \\
&\qquad - \sum_s \int_{\Omega_a \cap \mathrm{Q}_s} f(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t))\Big)\, dt \Big| \;\leqslant\; J_9 \;+\; J_{10} \;+\; J_{11} \quad \text{mit}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$J_9 \;=\; \Big| \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,) \setminus \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} f\Big(t, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\hat{z}(t) + w(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(J\hat{z}(t) + Jw(t))\Big)\, dt \Big|\,; \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
J_{10} \;=\; \Big| \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big(& f\Big(t, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\hat{z}(t) + w(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(J\hat{z}(t) + Jw(t))\Big) \\
& - f(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t))\Big)\, dt \Big|\,;
\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$J_{11} \;=\; \Big| \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} f(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t))\Big)\, dt \Big|\,. \tag{3.106}$$

Mit der Wachstumsbedingung für f und den Definitionen von Ω_a, Ω_c und $\bigcup_s \mathrm{Q}_s$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
J_9 \;&\leqslant\; \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,) \setminus \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big|\, f(\;\ldots\;)\,\big|\, dt \;\leqslant\; \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,) \setminus \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big(\, A(t) + C_2\,\big)\, dt \;\leqslant\; \int_{(\,\Omega_a \cap \Omega_c\,) \setminus \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big(\, C_2 + C_3\,\big)\, dt \\
&\leqslant\; \int_{\Omega_a \setminus \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big(\, C_2 + C_3\,\big)\, dt \;\leqslant\; (C_2 + C_3)\,\varepsilon\,;
\end{aligned} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}
J_{11} \;&\leqslant\; \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big|\, f(\;\ldots\;)\,\big|\, dt \;\leqslant\; \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big(\, A(t) + C_2\,\big)\, dt \\
&\leqslant\; \sum_s \int_{(\,\Omega_a \setminus \Omega_c\,) \cap \cup_{s=1}^{r} \mathrm{Q}_s} \big(\, C_3 + C_2\,\big)\, dt \;\leqslant\; \sum_s \int_{\Omega \setminus \Omega_c} \big(\, C_3 + C_2\,\big)\, dt \;\leqslant\; \varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Für J_{10} ergibt sich:

$$\begin{aligned}
J_{10} \;\leqslant\; \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c \cap \mathrm{Q}_s} \Big| & f\Big(t, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\hat{z}(t) + w_s(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(J\hat{z}(t) + Jw_s(t))\Big) \\
& - f\Big(t_s, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\,[\,\hat{z}\,]_s + w_s(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\,[\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t))\Big) \Big|\, dt \\
+ \sum_s \int_{\Omega_a \cap \Omega_c\, \mathrm{Q}_s} \Big| & f\Big(t_s, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\,[\,\hat{z}\,]_s + w_s(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\,(\,[\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t))\Big) \\
& - f(t_s, [\,\hat{z}\,]_s, [\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t)) \Big|\, dt
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Für die Argumentdifferenz im ersten Summanden gilt nach (3.41) und (3.51):

$$\big|\, t - t_s \,\big| \;+\; \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\, \big|\, \hat{z}(t) - [\,\hat{z}\,]_s \,\big| \;+\; \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\, \big|\, J\hat{z}(t) - [\,J\hat{z}\,]_s \,\big| \;\leqslant\; \delta_3(\varepsilon) \;\leqslant\; \delta_2(\varepsilon)\,; \tag{3.110}$$

im zweiten Summanden finden wir

$$\Big| \frac{\big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\, [\,\hat{z}\,]_s \;+\; \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\, w_s(t) \Big| \;+\; \frac{\big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}{c_{\mathrm{K}} + \big(\delta_2(\varepsilon)\big)^2}\, \big|\, [\,J\hat{z}\,]_s + Jw_s(t) \,\big|$$

$$\leqslant \frac{\big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}{c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}\,(C_1 + C_{\mathrm{K}}) \;+\; \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2} \cdot \frac{\delta_4(\varepsilon)}{3} \tag{3.111}$$

$$\leqslant \frac{c_{\mathrm{K}}}{3\,\big(\,c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2\,\big)} \cdot \delta_2(\varepsilon) \;\leqslant\; \delta_2(\varepsilon)\,. \tag{3.112}$$

Damit folgt:

$$J_{10} \;\leqslant\; 2 \sum_s |\,\mathrm{Q}_s\,|\,\varepsilon \;\leqslant\; 2\,|\,\Omega_a\,|\,\varepsilon\,. \tag{3.113}$$

Schließlich ergibt sich zusammen mit Lemma 3.6.:

$$\begin{aligned} &\Big|\, F\Big(\, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}\,(\hat{z} + w)\,\Big) \;-\; F^{(qc)}(\hat{x})\,\Big| \\ &= \Big|\int_{\Omega_a \cap \Omega_c} f\Big(\, t, \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}\,(\hat{z}(t) + w(t)), \frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}\,(J\hat{z}(t) + Jw(t))\,\Big)\,dt \\ &\quad - \int_{\Omega} f^{(qc)}(t, \hat{x}(t), J\hat{x}(t))\,dt\,\Big| \end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\leqslant\; C_5\,\varepsilon \;+\; J_9 \;+\; J_{10} \;+\; J_{11} \;\leqslant\; \big(\,C_5 + 1 + C_2 + C_3 + 2\,|\,\Omega_a\,|\,\big)\,\varepsilon\,. \tag{3.115}$$

Die Funktion

$$\frac{c_{\mathrm{K}}}{c_{\mathrm{K}} + \big(\,\delta_2(\varepsilon)\,\big)^2}\,(\hat{z} + w) \tag{3.116}$$

ist in (P) zulässig, und der Beweis von Satz 3.8. ist beendet. ∎

Damit ist gleichzeitig Satz 1.4. vollständig bewiesen. ∎

c) Beweis des Existenzsatzes 1.5.

Der Begriff der polykonvexen Funktion ist wie folgt erklärt:

Definition 3.9. (polykonvexe Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$):[36] *Eine Funktion $r(v)\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt polykonvex, wenn sie eine Darstellung $r(v) = h\big(\,g(v)\,\big)$ als Verkettung einer konvexen Funktion h mit der Abbildung g gestattet, die jeder (n,m)-Matrix $v \in \mathbb{R}^{nm}$ den Vektor ihrer sämtlichen Unterdeterminanten zuordnet.*

Da (P) und f alle Voraussetzungen des Relaxationssatzes 1.4. erfüllen, bleibt lediglich nachzuweisen, daß für alle festen $(\hat{t}, \hat{\xi}) \in \big(\,\Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^n$ die polykonvexe Funktion $f(\hat{t}, \hat{\xi}, v)$ auf ganz $\mathbb{R}^{nm}$ mit ihrer unterhalbstetigen quasikonvexen Hüllfunktion $f^{(qc)}(\hat{t}, \hat{\xi}, v)$ übereinstimmt. Die Unterhalbstetigkeit von $f(\hat{t}, \hat{\xi}, \cdot\,)$ ergibt sich aus Definition 1.1., 2), Teil c), und für $v \in \big(\,\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}\,\big)$ gilt wegen Anmerkung c) nach Definition 2.6. $f(\hat{t}, \hat{\xi}, v) = f^{(qc)}(\hat{t}, \hat{\xi}, v) = (+\infty)$. Also ist nur noch zu bestätigen, daß $f(\hat{t}, \hat{\xi}, v)$ die Morreysche Integralungleichung erfüllt, wobei $\mathrm{dom}\big(\,f(\hat{t}, \hat{\xi}, \cdot\,)\,\big) = \mathrm{K}$. Für $v \in \big(\,\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}\,\big)$ ergibt sich deren Gültigkeit aus [Wagner 06b], p. 238, Theorem 2, i); für $v \in \mathrm{K}$ kann der Beweis aus [Dacorogna 08], p. 161, Proof of Theorem 5.3., Part 2, übernommen werden, indem man beachtet, daß in diesem Fall nach Satz 2.2. nur Testfunktionen $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $v + Jx(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$ berücksichtigt werden müssen. Dann bleiben jedoch alle im Beweis auftretenden Integrale endlich. ∎

[36] [Dacorogna 08], p. 157, Definition 5.1., (iii).

4. Existenz globaler Minimalstellen im image-registration-Problem mit polykonvexem Regularisierungsterm.

a) Elastic image registration bzw. elastic image matching.

Wir legen einen rechteckigen Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Seitenlängen a und b zugrunde, der den Nullpunkt als Schnittpunkt seiner Diagonalen enthält.[37] Gegeben sind zwei Graustufenbilder $I_0(t)$, $I_1(t)\colon \Omega \to [\,0\,,\,1\,]$, wobei I_0 als Referenzbild betrachtet wird. Gesucht wird eine Deformation $x(t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, die $I_1(\,t - x(t)\,) \approx I_0(t)$ erfüllt und damit I_1 in möglichst gute Übereinstimmung mit I_0 bringt. Anhand der Eigenschaften von x möchte man beispielsweise entscheiden, ob die in I_1 und I_0 abgebildeten Objekte identisch sind, oder Erkenntnisse über zwischenzeitliche Veränderungen an den abgebildeten Objekten gewinnen. Im Hinblick auf die Vielfalt moderner Bildgebungsverfahren und ihrer Anwendungen muß dieses Problem als eine der Grundaufgaben der mathematischen Bildverarbeitung angesehen werden.[38]
Die Bestimmung von x führt auf ein inkorrekt gestelltes Problem. Die in der Literatur vorgeschlagenen Variationsmethoden beruhen auf der Minimierung des Defekts der Grauwerte[39]

$$\big(\,I_1(\,t - x(t)\,) \;-\; I_0(t)\,\big)^2 \tag{4.1}$$

bzw. der Differenz der Normalenrichtungen an die Isophoten[40]

$$\big\|\,\nabla I_1(\,t - x(t)\,)\,\big\|^2 \cdot \big\|\,\nabla I_0(t)\,\big\|^2 \;-\; \big(\,\nabla I_1(\,t - x(t)\,)^{\mathrm{T}}\,\nabla I_0(t)\,\big)^2 \tag{4.2}$$

zusammen mit einem Regularisierungsterm, in den die ersten verallgemeinerten Ableitungen von x eingehen. Die entsprechenden Variationsprobleme in Sobolevräumen lauten wie folgt:

$$(\mathrm{V})_1\colon \quad F(x) = \int_\Omega \Big(\,I_1(\,t - x(t)\,) - I_0(t)\,\Big)^2\,dt \;+\; \mu \cdot \int_\Omega r\big(\,Jx(t)\,\big)\,dt \;\longrightarrow\; \inf!\,;\; x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) \tag{4.3}$$

bzw.

$$\begin{aligned}(\mathrm{V})_2\colon \quad F(x) = \int_\Omega \Big(\,\big\|\,\nabla I_1(\,t - x(t)\,)\,\big\|^2\,\big\|\,\nabla I_0(t)\,\big\|^2 \;-\; \big(\,\nabla I_1(\,t - x(t)\,)^{\mathrm{T}}\,\nabla I_0(t)\,\big)^2\Big)\,dt \\ +\,\mu \cdot \int_\Omega r\big(\,Jx(t)\,\big)\,dt \;\longrightarrow\; \inf!\,;\; x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)\end{aligned} \tag{4.4}$$

mit (hinreichend regulären, gegebenenfalls vorgeglätteten) Bilddaten $I_0(t)$, $I_1(t)\colon \Omega \to [\,0\,,\,1\,]$,[41] $2 \leqslant p < \infty$, einem Regularisierungsparameter $\mu > 0$ und Integranden $r(v)$, die als konvexe oder polykonvexe Funktionen aus Modellen der Elastizitätstheorie übernommen werden.[42] Die Einbeziehung von konvexen Gradientenbeschränkungen

$$Jx(t) \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \tag{4.5}$$

---

[37] In der Literatur wird das image-registration-Problem auch für Bilddaten auf einem Quader $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet. Wir beschränken uns im folgenden auf den zweidimensionalen Fall.

[38] Vergleiche die Einführung in [Modersitzki 04], pp. 1 ff. und pp. 21 ff.

[39] Siehe z. B. [Hermosillo/Chefd'hotel/Faugeras 02], p. 331, [Henn/Witsch 00], [Henn/Witsch 01], [Modersitzki 04], pp. 77 ff. Das in [Alvarez/Weickert/Sánchez 00] aufgesuchte "optical flow field" ist in Wirklichkeit ebenfalls eine Deformation x. Vergleiche schließlich noch [Wagner 07a], p. 16.

[40] Wenn keine Korrespondenz zwischen den Grauwerten von I_0 und I_1 zu erwarten ist, führt man hiermit ein Matching der Kantenskizzen aus. Siehe [Droske/Rumpf 04], [Gallardo/Meju 03], [Haber/Modersitzki 07].

[41] Um die Integration in den Zielfunktionalen ausführen zu können, müßte man zusätzlich noch $t - x(t) \in \Omega$ $(\forall)\, t \in \Omega$ fordern. Diese Bedingung kann jedoch eliminiert werden, indem man die Bilddaten I_0 und I_1 von vornherein mit einem hinreichend breiten schwarzen Rahmen versieht, d. h. mit Null auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ fortsetzt (siehe [Henn/Witsch 01], p. 1078).

[42] Konkrete Beispiele werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

mit einem konvexen Körper $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ überführt (V) in ein mehrdimensionales Steuerungsproblem der Gestalt (P) und erlaubt in Analogie zu [Brune/Maurer/Wagner 08] und [Franek/Franek/Maurer/ Wagner 08] eine simultane Erkennung der "potentiellen Unstetigkeiten" von x (Bereiche mit betragsgroßen Gradienten ∇x_1, ∇x_2), wobei der Abstand $\mathrm{Dist}\big(\, Jx(t)\,,\, \partial\mathrm{K}\,\big)$ als Indikator benutzt wird.

b) Image registration als Steuerungsproblem mit konvexer Regularisierung.

Da sich menschliches Gewebe näherungsweise linear-elastisch verhält, ist es naheliegend, für image-registration-Probleme aus der medizinischen Bildgebung konvexe Regularisierungsterme aus der linearen Elastizitätstheorie zu verwenden. [43] In diesem Fall ist die Hinzunahme einer konvexen Gradientenbeschränkung zwingend, weil dann die zu $\| Jx \|$ proportionale Schubspannung beschränkt bleiben muß. Damit entstehen aus $(\mathrm{V})_1$ und $(\mathrm{V})_2$ folgende Steuerungsprobleme:

$$(\mathrm{P})_1: \quad F(x) = \int_\Omega \Big(I_1(\, t - x(t)\,) - I_0(t) \Big)^2 dt \;+\; \mu \cdot \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\frac{\partial x_i(t)}{\partial t_j} + \frac{\partial x_j(t)}{\partial t_i} \Big)^2 dt \;\longrightarrow\; \inf!\,; \tag{4.6}$$
$$x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)\,;\; Jx(t) \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \;\; (\forall)\, t \in \Omega$$

bzw.

$$(\mathrm{P})_2: \quad F(x) = \int_\Omega \Big(\big\| \nabla I_1(\, t - x(t)\,) \big\|^2 \big\| \nabla I_0(t) \big\|^2 \;-\; \big(\nabla I_1(\, t - x(t)\,)^{\mathrm{T}} \nabla I_0(t) \big)^2 \Big)\, dt \tag{4.7}$$
$$+\; \mu \cdot \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\frac{\partial x_i(t)}{\partial t_j} + \frac{\partial x_j(t)}{\partial t_i} \Big)^2 dt \;\longrightarrow\; \inf!\,;\; x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)\,;\; Jx(t) \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \;\; (\forall)\, t \in \Omega$$

mit $2 \leqslant p < \infty$ und $\mu > 0$. $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei ein konvexer Körper mit $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$; die Eigenschaften der zugrundegelegten Bilddaten I_0, $I_1 :\, \Omega \to [\,0\,,\,1\,]$ werden im folgenden Satz präzisiert.

Satz 4.1. (Existenzsatz für $(\mathrm{P})_1$ und $(\mathrm{P})_2$):

1) Wir betrachten $(\mathrm{P})_1$ mit den obigen Voraussetzungen an die Daten. Zusätzlich sei $I_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und $I_1 \in C_0^0(\Omega, \mathbb{R})$. Dann besitzt $(\mathrm{P})_1$ eine globale Minimalstelle $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

2) Wir betrachten $(\mathrm{P})_2$ mit den obigen Voraussetzungen an die Daten. Zusätzlich sei $I_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ und $I_1 \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann besitzt $(\mathrm{P})_2$ eine globale Minimalstelle $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Beweis: 1): Wegen der vorausgesetzten Nullrandbedingung dürfen wir uns die Bilddaten I_0, I_1 auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ jeweils mit Null fortgesetzt denken. Zum konvexen Körper K gehört die konvexe Indikatorfunktion $\varrho_{\mathrm{K}}(v) :\, \mathbb{R}^{2\times 2} \to \overline{\mathbb{R}}$, die durch

$$\varrho_{\mathrm{K}}(v) \;=\; \begin{cases} 0 & \big|\; v \in \mathrm{K}\,; \\ (+\infty) & \big|\; v \in \big(\mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \mathrm{K} \big) \end{cases} \tag{4.8}$$

erklärt ist. Die auf $\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2}$ definierte Funktion

$$f_1(t, \xi, v) \;=\; \big(I_1(t - \xi) - I_0(t) \big)^2 \;+\; \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \big(v_{ij} + v_{ji} \big)^2 \;+\; \varrho_{\mathrm{K}}(v) \tag{4.9}$$

besitzt die Eigenschaften a) – c) aus Definition 1.1., 2), und wegen $I_0(t)$, $I_1(t - \xi) \in [\,0\,,\,1\,]$ gilt

$$\big|\, f_1(t, \xi, v) \,\big| \;\leqslant\; I_1(t - \xi)^2 \;+\; I_0(t)^2 \;+\; 2\, I_0(t)\, I_1(t - \xi) \;+\; \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \big(v_{ij} + v_{ji} \big)^2 \tag{4.10}$$

$$\leqslant\; 4 \;+\; \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \big(v_{ij} + v_{ji} \big)^2 \quad \forall\, (t, \xi, v) \in \big(\Omega \setminus \mathrm{N} \big) \times \mathbb{R}^2 \times \mathrm{K}\,, \tag{4.11}$$

[43] Wir folgen [Henn/Witsch 01], p. 1079 f.

also erfüllt f_1 auch die Wachstumsbedingung d) aus Definition 1.1., 2) mit $A(t) \equiv 4$ und $B(\xi, v) = \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} (\, v_{ij} + v_{ji}\,)^2$. Schließlich ist $f_1(\hat{t}, \hat{\xi}, v)$ für alle festen $(\hat{t}, \hat{\xi}) \in \big(\, \Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^2$ bezüglich v konvex, also folgt mit Anmerkung c) nach Definition 2.6. für alle $v \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$f_1^c(\hat{t}, \hat{\xi}, v) \leqslant f_1^{(qc)}(\hat{t}, \hat{\xi}, v) \leqslant f_1(\hat{t}, \hat{\xi}, v) \leqslant f_1^c(\hat{t}, \hat{\xi}, v)\,, \tag{4.12}$$

und die Behauptung ergibt sich aus Satz 1.4.

2): Die auf $\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2}$ definierte Funktion

$$f_2(t, \xi, v) = \big\|\, \nabla I_1(t-\xi)\,\big\|^2 \cdot \big\|\, \nabla I_0(t)\,\big\|^2 - \big(\, \nabla I_1(t-\xi)^{\mathrm{T}}\, \nabla I_0(t)\,\big)^2 + \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \big(\, v_{ij} + v_{ji}\,\big)^2 + \varrho_{\mathrm{K}}(v) \tag{4.13}$$

besitzt die Eigenschaften a) – c) aus Definition 1.1., 2). Infolge der Voraussetzungen ist $\|\, \nabla I_0 \,\|$ fast überall und $\|\, \nabla I_1 \,\|$ überall durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt, so daß wir die Abschätzung

$$\big|\, f_2(t, \xi, v)\,\big| \leqslant C^4 \Big(\, 1 + \big|\cos\sphericalangle(\, \nabla I_1(t-\xi)\,,\, \nabla I_0(t)\,)\,\big|\,\Big) + \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \big(\, v_{ij} + v_{ji}\,\big)^2$$
$$\forall\, (t, \xi, v) \in \big(\, \Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^2 \times \mathrm{K} \tag{4.14}$$

erhalten. Damit erfüllt f_2 auch die Wachstumsbedingung d) mit $A(t) \equiv 2\, C^4$ und $B(\xi, v) = \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{2} (\, v_{ij} + v_{ji}\,)^2$. Wiederum ist $f_2(\hat{t}, \hat{\xi}, v)$ für alle festen $(\hat{t}, \hat{\xi}) \in \big(\, \Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^2$ in v konvex, so daß der Beweis wie in Teil 1) beendet werden kann. ∎

c) Image registration als Steuerungsproblem mit polykonvexer Regularisierung.

Ein alternativer Zugang zum image-registration-Problem besteht in der Verwendung von polykonvexen Regularisierungstermen, die mit hyperelastischen Materialgesetzen korrespondieren. Zusätzlich wurde vorgeschlagen, nur orientierungserhaltende, bijektive Deformationen zuzulassen (d. h. solche mit $\mathrm{Det}\,(Jx) > 0\,)$.[44] Lassen wir die letzte Bedingung zunächst beiseite, so ergeben sich folgende Steuerungsprobleme:

$$\begin{aligned}(\mathrm{P})_3: \quad & F(x) = \int_\Omega \Big(\, I_1(\, t - x(t)\,) - I_0(t)\,\Big)^2 dt + \mu \cdot \int_\Omega \Big(\, c_1 \,\big\|\, Jx(t)\,\big\|^p + c_2 \big(\, \mathrm{Det}\, Jx(t)\,\big)^2\,\Big)\, dt \longrightarrow \inf!\,; \\ & x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)\,;\ Jx(t) \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \ \ (\forall)\, t \in \Omega \end{aligned} \tag{4.15}$$

bzw.

$$\begin{aligned}(\mathrm{P})_4: \quad & F(x) = \int_\Omega \Big(\, \big\|\, \nabla I_1(\, t - x(t)\,)\,\big\|^2 \big\|\, \nabla I_0(t)\,\big\|^2 - \big(\, \nabla I_1(\, t - x(t)\,)^{\mathrm{T}}\, \nabla I_0(t)\,\big)^2\,\Big)\, dt \\ & + \mu \cdot \int_\Omega \Big(\, c_1 \,\big\|\, Jx(t)\,\big\|^p + c_2 \big(\, \mathrm{Det}\, Jx(t)\,\big)^2\,\Big)\, dt \longrightarrow \inf!\,;\ x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)\,;\ Jx(t) \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \ \ (\forall)\, t \in \Omega \end{aligned} \tag{4.16}$$

mit $2 \leqslant p < \infty$, $\mu > 0$ und Gewichten $c_1,\ c_2 > 0$. $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei wiederum ein konvexer Körper mit $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$. Als Matrixnorm wird $\|\, M \,\| = \mathrm{trace}\,(\, M^{\mathrm{T}} M\,)$ benutzt. Die Eigenschaften der zugrundegelegten Bilddaten $I_0,\ I_1 :\ \Omega \to [\,0\,,\,1\,]$ präzisieren wir wie folgt:

Satz 4.2. (Existenzsatz für $(\mathrm{P})_3$ und $(\mathrm{P})_4$):

1) Wir betrachten $(\mathrm{P})_3$ mit den obigen Voraussetzungen an die Daten. Zusätzlich sei $I_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und $I_1 \in C_0^0(\Omega, \mathbb{R})$. Dann besitzt $(\mathrm{P})_3$ eine globale Minimalstelle $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

---

44) [Droske/Rumpf 04], p. 673 f.

2) Wir betrachten $(\mathrm{P})_4$ *mit den obigen Voraussetzungen an die Daten. Zusätzlich sei* $I_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ *und* $I_1 \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R})$. *Dann besitzt* $(\mathrm{P})_4$ *eine globale Minimalstelle* $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

Beweis: 1): Erneut dürfen wir uns die Bilddaten I_0, I_1 auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ mit Null fortgesetzt denken. Die auf $\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2}$ definierte Funktion

$$f_3(t,\xi,v) \;=\; \big(\, I_1(t-\xi) - I_0(t)\,\big)^2 \;+\; \mu \cdot \Big(c_1 \,\big\|\, v \,\big\|^p \;+\; c_2 \,\big(\,\mathrm{Det}\, v\,\big)^2 \Big) \;+\; \varrho_{\mathrm{K}}(v) \tag{4.17}$$

erfüllt a) – c) aus Definition 1.1., 2) und — analog zum Beweis von Satz 4.1., 1) — wegen

$$\big|\, f_3(t,\xi,v) \,\big| \;\leqslant\; 4 \;+\; \mu \cdot \Big(c_1 \,\|\, v \,\|^p \;+\; c_2 \,\big(\,\mathrm{Det}\, v\,\big)^2 \Big) \quad \forall\, (t,\xi,v) \in \big(\,\Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^2 \times \mathrm{K} \tag{4.18}$$

auch eine Wachstumsbedingung d) mit $A(t) \equiv 4$ und $B(\xi,v) = \mu\,\big(\, c_1 \,\|\, v \,\|^p + c_2\,(\,\mathrm{Det}\, v\,)^2 \,\big)$. Wir bemerken, daß die Funktion $f_3(\hat{t},\hat{\xi},v)$ für alle festen $(\hat{t},\hat{\xi}) \in \big(\,\Omega \setminus \mathrm{N}\,\big)$ als Summe der polykonvexen Funktionen $\big(\, I_1(\hat{t}-\hat{\xi}) - I_0(\hat{t})\,\big)^2 + \mu \cdot \big(\, c_1 \,\|\, v \,\|^p + c_2\,(\,\mathrm{Det}\, v\,)^2 \,\big)$ und $\varrho_{\mathrm{K}}(v)$ polykonvex in v bleibt. Also darf Satz 1.5. angewendet werden, und $(\mathrm{P})_3$ besitzt eine globale Minimalstelle.

2): Man argumentiert analog zu Teil 1) und dem Beweis von Satz 4.1., indem man beachtet, daß für den Integranden

$$f_4(t,\xi,v) = \big\|\, \nabla I_1(t-\xi) \,\big\|^2 \cdot \big\|\, \nabla I_0(t) \,\big\|^2 - \big(\, \nabla I_1(t-\xi)^{\mathrm{T}}\, \nabla I_0(t)\,\big)^2 + \mu \cdot \Big(c_1 \,\big\|\, v \,\big\|^p + c_2 \,\big(\,\mathrm{Det}\, v\,\big)^2 \Big) + \varrho_{\mathrm{K}}(v) \tag{4.19}$$

für alle $(t,\xi,v) \in \big(\,\Omega \setminus \mathrm{N}\,\big) \times \mathbb{R}^2 \times \mathrm{K}$ die Abschätzung

$$\big|\, f_4(t,\xi,v) \,\big| \;\leqslant\; C^4 \Big(1 \;+\; \big|\, \cos\!\sphericalangle(\, \nabla I_1(t-\xi)\,,\, \nabla I_0(t)\,) \,\big| \Big) \;+\; \mu \cdot \Big(c_1 \,\big\|\, v \,\big\|^p \;+\; c_2 \,\big(\,\mathrm{Det}\, v\,\big)^2 \Big) \;+\; \varrho_{\mathrm{K}}(v) \tag{4.20}$$

besteht. ■

d) Image registration als Steuerungsproblem mit der Nebenbedingung $\mathrm{Det}\,(Jx) > 0$ **und polykonvexer Regularisierung.**

Wir berücksichtigen in $(\mathrm{P})_3$ die zusätzliche Nebenbedingung $\mathrm{Det}\,(Jx) > 0$ und fügen im Zielfunktional einen Penaltyterm mit dem polykonvexen Integranden [45)]

$$-c_3 \cdot \ln\big(\,\mathrm{Det}\, Jx(t)\,\big) \tag{4.21}$$

mit $c_3 > 0$ hinzu. Damit entsteht die Aufgabe

$$(\mathrm{P})_5: \quad F(x) = \int_\Omega \Big(I_1(\,t - x(t)\,) - I_0(t) \Big)^2 dt \;+\; \mu \cdot \int_\Omega \Big(c_1 \,\big\|\, Jx(t) \,\big\|^p \;+\; c_2 \,\big(\,\mathrm{Det}\, Jx(t)\,\big)^2 \;- c_3 \cdot \ln\big(\,\mathrm{Det}\, Jx(t)\,\big) \Big)\, dt \;\longrightarrow\; \inf\!\,; \tag{4.22}$$

$$x \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^2)\,;\; Jx(t) \in \mathrm{K} \cap \{\, v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\big|\; \mathrm{Det}\,(v) > 0 \,\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \;\; (\forall)\, t \in \Omega\,, \tag{4.23}$$

die aus den Standardvoraussetzungen von Abschnitt 1.a) herausfällt, da der kompakte Steuerbereich K noch mit einer offenen Menge geschnitten wird. Dennoch kann man aus Satz 4.2., 1) ohne zusätzlichen Aufwand einen Existenzsatz für $(\mathrm{P})_5$ erhalten:

---

45) [Droske/Rumpf 04], p. 674, (3.2).

Satz 4.3. (Existenzsatz für $(\mathrm{P})_5$ **):** *Wir betrachten* $(\mathrm{P})_5$ *unter folgenden Voraussetzungen an die Daten: Es sei* $2 \leqslant p < \infty$, $I_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $I_1 \in C_0^0(\Omega, \mathbb{R})$, $\mu > 0$, c_1, c_2, $c_3 > 0$, *und* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ *sei ein konvexer Körper mit* $\mathfrak{o} \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$. *Dann besitzt* $(\mathrm{P})_5$ *eine globale Minimalstelle* $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Satzes existieren zulässige Lösungen von $(\mathrm{P})_5$, beispielsweise

$$x(t) \;=\; \varepsilon \cdot \operatorname{Min}\big(\operatorname{Dist}(t, \partial\Omega)\,,\, \frac{a}{4}\,,\, \frac{b}{4}\big) \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

für $\alpha \in [\,0\,,\,\pi/4\,]$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Umgekehrt folgt aus $Jx(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$, daß das Zielfunktional nach unten beschränkt ist. Damit besitzt $(\mathrm{P})_5$ eine Minimalfolge $\{\, x^N \,\}$, $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, deren Glieder auch in $(\mathrm{P})_3$ zulässig sind. Entlang einer Teilfolge $\{\, x^{N'} \,\} \subseteq \{\, x^N \,\}$ mit $x^{N'} \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^2)}\, \hat{x}$ und $Jx^{N'} \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2})}\, J\hat{x}$ gilt nach Satz 4.2., 1) und Satz 1.4.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big(I_1(\,t - \hat{x}(t)\,) - I_0(t) \Big)^2 dt \;+\; \mu \cdot \int_\Omega \Big(c_1 \,\big\|\, J\hat{x}(t) \,\big\|^{\,p} \;+\; c_2 \,\big(\operatorname{Det} J\hat{x}(t)\,\big)^2 \Big)\, dt \\ &\leqslant \liminf_{N'\to\infty} \int_\Omega \Big(I_1(\,t - x^{N'}(t)\,) - I_0(t) \Big)^2 dt \;+\; \mu \cdot \int_\Omega \Big(c_1 \,\big\|\, Jx^{N'}(t) \,\big\|^{\,p} \;+\; c_2 \,\big(\operatorname{Det} Jx^{N'}(t)\,\big)^2 \Big)\, dt\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Auf den polykonvexen Integranden $f_5 \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \overline{\mathbb{R}}$ gemäß

$$f_5(v) \;=\; \begin{cases} -\mu\, c_3 \,\ln(\operatorname{Det} v\,) & \big|\; \operatorname{Det} v > 0\,; \\ \quad (+\infty) & \big|\; \operatorname{Det} v \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

darf jedoch [Dacorogna 08], p. 391 f., Theorem 8.16, zusammen mit der Anmerkung ebenda, p. 392, angewendet werden: Nach der Wahl von $m = n = 2$ und $p = 2$ ist die konvexe Funktion $h(v, \delta) \colon \mathbb{R}^5 \to \overline{\mathbb{R}}$ gemäß

$$h(v, \delta) \;=\; \begin{cases} -\mu\, c_3 \,\ln \delta & \big|\; \delta > 0\,; \\ \quad (+\infty) & \big|\; \delta \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

nach unten durch $h(v, \delta) \geqslant -\mu\, c_3\, \delta$ beschränkt, worin die konstante Funktion $(-\mu\, c_3)$ zu $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ gehört. Für die oben genannte Teilfolge gilt gleichzeitig $Jx^{N'} \rightharpoonup{}^{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2})}\, J\hat{x}$, und aus dem zitierten Satz ergibt sich

$$-\,\mu \int_\Omega c_3 \,\ln\big(\operatorname{Det} J\hat{x}(t)\,\big)\, dt \;\leqslant\; \liminf_{N'\to\infty} \Big(-\,\mu \int_\Omega c_3 \,\ln\big(\operatorname{Det} Jx^{N'}(t)\,\big)\, dt \Big)\,. \tag{4.28}$$

Aus (4.25) und (4.28) folgt die Existenz einer globalen Minimalstelle für $(\mathrm{P})_5$. ∎

Analog kann man die Existenz einer globalen Minimalstelle für das modifizierte Problem $(\mathrm{P})_4$ beweisen, wenn man die Voraussetzungen über die Daten aus Satz 4.2., 2) beibehält.

Literaturverzeichnis.

1. [Acerbi/Fusco 84] Acerbi, E.; Fusco, N.: *Semicontinuity problems in the calculus of variations.* Arch. Rat. Mech. Anal. **86** (1984), 125 – 145
2. [Alvarez/Weickert/Sánchez 00] Alvarez, L.; Weickert, J.; Sánchez, J.: *Reliable estimation of dense optical flow fields with large displacements.* Int. J. Computer Vision **39** (2000), 41 – 56
3. [Aubert/Kornprobst 06] Aubert, G.; Kornprobst, P.: *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations.* Springer; New York etc. 2006, 2. Aufl.

4. [Ball/Murat 84] Ball, J. M.; Murat, F.: *$W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals.* J. Funct. Anal. **58** (1984), 225 – 253
5. [Bourbaki 52] Bourbaki, N.: *Éléments de Mathématique. Livre VI: Intégration, Chap. I – IV.* Hermann; Paris 1952
6. [Brokate 85] Brokate, M.: *Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics.* J. Math. Biology **23** (1985), 75 – 101
7. [Brøndsted 83] Brøndsted, A.: *An Introduction to Convex Polytopes.* Springer; New York - Heidelberg - Berlin 1983
8. [Brune/Maurer/Wagner 08] Brune, C.; Maurer, H.; Wagner, M.: *Edge detection within optical flow via multidimensional control.* BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-02/2008. Submitted: SIAM Journal on Imaging Sciences
9. [Buttazzo 89] Buttazzo, G.: *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations.* Longman; Harlow 1989 (Pitman Research Notes in Mathematics, Vol. 207)
10. [Conti 08] Conti, S.: *Quasiconvex functions incorporating volumetric constraints are rank-one convex.* J. Math. Pures Appl. **90** (2008), 15 – 30
11. [Dacorogna 04] Dacorogna, B.: *Introduction to the Calculus of Variations.* Imperial College Press; London 2004
12. [Dacorogna 08] Dacorogna, B.: *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Springer; New York etc. 2008, 2. Aufl.
13. [Dacorogna/Marcellini 97] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial case.* Acta Mathematica **178** (1997), 1 – 37
14. [Droske/Rumpf 04] Droske, M.; Rumpf, M.: *A variational approach to nonrigid morphological image registration.* SIAM J. Appl. Math. **64** (2004), 668 – 687
15. [Dunford/Schwartz 88] Dunford, N.; Schwartz, J. T.: *Linear Operators. Part I: General Theory.* Wiley-Interscience; New York etc. 1988
16. [Ekeland/Témam 99] Ekeland, I.; Témam, R.: *Convex Analysis and Variational Problems.* SIAM; Philadelphia 1999, 2. Aufl.
17. [Evans/Gariepy 92] Evans, L. C.; Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press; Boca Raton etc. 1992
18. [Feichtinger/Tragler/Veliov 03] Feichtinger, G.; Tragler, G.; Veliov, V. M.: *Optimality conditions for age-structured control systems.* J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), 47 – 68
19. [Franek/Franek/Maurer/Wagner 08] Franek, L.; Franek, M.; Maurer, H.; Wagner, M.: *Image restoration and simultaneous edge detection by optimal control methods.* BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-05/2008. Submitted: Optim. Contr. Appl. Meth.
20. [Gallardo/Meju 03] Gallardo, L. A.; Meju, M. A.: *Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data.* Geophysical Research Letters **30** (2003) 13, 1658, 1 - 1 – 1 - 4
21. [Haber/Modersitzki 07] Haber, E.; Modersitzki, J.: *Intensity gradient based registration and fusion of multimodal images.* Methods of Information in Medicine **46** (2007), 292 – 299
22. [Henn/Witsch 00] Henn, S.; Witsch, K.: *A multigrid approach for minimizing a nonlinear functional for digital image matching.* Computing **64** (2000), 339 – 348
23. [Henn/Witsch 01] Henn, S.; Witsch, K.: *Iterative multigrid regularization techniques for image matching.* SIAM J. Sci. Comput. **23** (2001), 1077 – 1093
24. [Hermosillo/Chefd'hotel/Faugeras 02] Hermosillo, G.; Chefd'hotel, C.; Faugeras, O.: *Variational methods for multimodal image matching.* Int. J. Computer Vision **50** (2002), 329 – 343
25. [Hinterberger/Scherzer/Schnörr/Weickert 02] Hinterberger, W.; Scherzer, O.; Schnörr, C.; Weickert, J.: *Analysis of optical flow models in the framework of the calculus of variations.* Num. Funct. Anal. Optim. **23** (2002), 69 – 89

26. [Kinderlehrer/Pedregal 91] Kinderlehrer, D.; Pedregal, P.: *Characterizations of Young measures generated by gradients.* Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991), 329 – 365
27. [Marcellini/Sbordone 80] Marcellini, P.; Sbordone, C.: *Semicontinuity problems in the calculus of variations.* Nonlinear Analysis **4** (1980), 241 – 257
28. [Modersitzki 04] Modersitzki, J.: *Numerical Methods for Image Registration.* Oxford University Press; Oxford 2004
29. [Morrey 66] Morrey, C. B.: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer; Berlin - Heidelberg - New York 1966 (Grundlehren 130)
30. [Pickenhain/Wagner 00] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Critical points in relaxed deposit problems.* In: Ioffe, A.; Reich, S.; Shafrir, I. (Hrsg.): Calculus of Variations and Optimal Control, Technion 98, Vol. II (Research Notes in Mathematics, Vol. 411). Chapman & Hall / CRC Press; Boca Raton etc. 2000, 217 – 236
31. [Roubíček 97] Roubíček, T.: *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus.* De Gruyter; Berlin - New York 1997
32. [Schneider 93] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory.* Cambridge University Press; Cambridge 1993
33. [Ting 69a] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars.* J. Math. Mech. **19** (1969), 531 – 551
34. [Ting 69b] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion problem III.* Arch. Rat. Mech. Anal. **34** (1969), 228 – 244
35. [Wagner 96] Wagner, M.: *Erweiterungen des mehrdimensionalen Pontrjaginschen Maximumprinzips auf meßbare und beschränkte sowie distributionelle Steuerungen.* Dissertation; Universität Leipzig 1996
36. [Wagner 06a] Wagner, M.: *Mehrdimensionale Steuerungsprobleme mit quasikonvexen Integranden.* Habilitationsschrift. Brandenburgische Technische Universität Cottbus 2006
37. [Wagner 06b] Wagner, M.: *Nonconvex relaxation properties of multidimensional control problems.* In: Seeger, A. (Hrsg.): Recent Advances in Optimization. Springer; Berlin etc. 2006 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 563), 233 – 250
38. [Wagner 06c] Wagner, M.: *On the lower semicontinuous quasiconvex envelope for unbounded integrands (I).* BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-04/2006. Erscheint in: ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations
39. [Wagner 07a] Wagner, M.: *Pontryagin's maximum principle for multidimensional control problems in image processing.* BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-10/2007. Erscheint in: J. Optim. Theory Appl.
40. [Wagner 07b] Wagner, M.: *Quasiconvex relaxation of multidimensional control problems.* BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-11/2007. Erscheint in: Adv. Math. Sci. Appl.
41. [Wagner 08] Wagner, M.: *Jensen's inequality for the lower semicontinuous quasiconvex envelope and relaxation of multidimensional control problems.* EPF Lausanne, Publications de l'Institut d'analyse et calcul scientifique, Préimpression No. 01.2008. Submitted: J. Math. Anal. Appl.

Zuletzt geändert: 08. 10. 2008

Anschrift des Verfassers: Marcus Wagner, BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus.

Homepage / e-mail: `www.thecitytocome.de` / `wagner@math.tu-cottbus.de`