

Sobolevräume und partielle Differentialgleichungen

Das nachstehende Kapitel wurde aus PICKENHAIN, S.; WAGNER, M. (Hrsg.): *Partielle Differentialgleichungen 2006. Vortragsskripte zum Proseminar*. BTU Cottbus; Preprint-Reihe Mathematik M-08/2006, entnommen, und in den Bezeichnungen an den laufenden Kurs angepaßt. Wir fassen die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Theorie der Sobolevräume zusammen, wobei wir vollständig auf Beweise verzichten und in diesem Zusammenhang auf die angegebenen Quellen verweisen.

0.1 Funktionenräume auf einem offenen Grundgebiet ([EVANS 98], p. 618)

Wenn nicht anders vereinbart, setzen wir stets voraus, daß $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, offene Menge ist. Die Notation $V \subset\subset \Omega$ bedeutet: V ist eine kompakte Teilmenge von Ω . Die Menge $\text{supp } u = \text{cl } \{t \in \Omega \mid |x(t)| > 0\}$ heißt Träger der Funktion x .

Definition 0–01 (Räume individueller Funktionen):

- 1) $C^0(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionen $\{x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ ist auf } \Omega \text{ stetig}\}$.
- 2) $C^0(\overline{\Omega})$ ist die Menge aller Funktionen $\{x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ ist auf } \Omega \text{ gleichmäßig stetig}\}$.
- 3) $C^k(\Omega)$ ist für $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ die Menge aller Funktionen $\{x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ ist auf } \Omega \text{ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen bis zur } k\text{-ten Ordnung}\}$.
- 4) $C^k(\overline{\Omega})$ ist für $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ die Menge aller Funktionen $\{x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ ist auf } \Omega \text{ gleichmäßig stetig und besitzt dort gleichmäßig stetige partielle Ableitungen bis zur } k\text{-ten Ordnung}\}$.
- 5) $C_c^0(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionen $\{x \in C^0(\Omega) \mid \text{supp } x \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$.
- 6) $C_c^k(\Omega)$ ist für $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ die Menge aller Funktionen $\{x \in C^k(\Omega) \mid \text{supp } x \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$.

Anmerkungen: 1) Definiert man stetige Funktionen auf einer offenen Menge Ω , so steht der Satz von Weierstraß nicht zur Verfügung, und Funktionen $x \in C^0(\Omega)$ können unbeschränkt sein.

2) Die Definition bringt auf elegante Weise zum Ausdruck, daß die Funktionen $x \in C^0(\overline{\Omega})$ eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf den Rand $\partial\Omega$ gestatten (siehe [DUNFORD/SCHWARTZ 88], p. 23, Theorem 17). Mit der Supremumsnorm wird $C^0(\overline{\Omega})$ zum Banachraum.

3) Analog zum Raum $C^0(\Omega)$ können unbeschränkte Funktionen und Ableitungen auftreten. Die Ableitungen werden an dieser Stelle im klassischen Sinne verstanden.

4) Analog zum Raum $C^0(\overline{\Omega})$ können sowohl x selbst als auch alle vorhandenen Ableitungen stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortgesetzt werden. Mit passender Norm entsteht ein Banachraum.

5) Funktionen $x \in C_c^0(\Omega)$ haben insbesondere Randwerte Null und sind beschränkt. Mit der Supremumsnorm entsteht ein Banachraum.

6) Bei Funktionen $x \in C_c^k(\Omega)$ haben sowohl x selbst als auch alle vorhandenen Ableitungen die Randwerte Null und sind beschränkt. Mit passender Norm entsteht ein Banachraum.

Definition 0–02 (Äquivalenzklassenräume integrierbarer Funktionen):

1) $L^p(\Omega)$ ist für $1 \leq p < \infty$ die Menge aller Äquivalenzklassen

$$\{ [x] \mid x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist meßbar, } \|x\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p dt_1 \dots dt_m \right)^{1/p} < \infty \}.$$

2) $L^\infty(\Omega)$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen

$$\{ [x] \mid x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist meßbar, } \|x\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty \}.$$

3) $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ist für $1 \leq p \leq \infty$ die Menge aller Äquivalenzklassen

$$\{ [x] \mid x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ für alle } V \subset\subset \Omega \text{ gehört die Einschränkung } [x|_V] \text{ zu } L^p(V) \}.$$

Anmerkungen: 1) und 2) sind bekannte Banachräume. 3) ist kein Banachraum; trotzdem wird die Konstruktion insbesondere auf unbeschränkten Grundgebieten Ω oft benutzt. Innerhalb der Äquivalenzklassen können die Funktionswerte auf m -dimensionalen Lebesgueschen Nullmengen beliebig abgeändert werden.

0.2 Verallgemeinerte Ableitungen und Sobolevräume ([EVANS 98], pp. 241 ff.)

Die moderne Behandlung partieller Differentialgleichungen umfaßt Situationen, in denen Daten und Lösungen nicht notwendig im klassischen Sinne differenzierbar sein müssen. Man benutzt als Grundbegriff:

Definition 0–03 (verallgemeinerte Ableitung): Eine Funktion $y \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt verallgemeinerte partielle Ableitung von $x \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, wenn gilt:

$$y = D_{t_i} x \iff \int_{\Omega} x(t) \cdot D_{t_i} \varphi(t) dt = (-1) \cdot \int_{\Omega} y(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

$C_c^\infty(\Omega)$ heißt auch Raum der Testfunktionen.

Während die klassische partielle Ableitung durch lokale Grenzwertbildung erklärt ist, definiert man die verallgemeinerte Ableitung durch eine Variationsgleichung. Verallgemeinerte Ableitungen sind, wenn sie existieren, als L^1 -Äquivalenzklassen eindeutig bestimmt. Räume (genauer: Äquivalenzklassenräume) von verallgemeinert differenzierbaren Funktionen sind Sobolevräume.

Definition 0–04 (Sobolevräume): 1) Für $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ definieren wir $W_p^k(\Omega)$ als Menge aller Äquivalenzklassen

$$\{ [x] \mid x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; x \text{ besitzt verallgemeinerte partielle Ableitungen bis zur } k\text{-ten Ordnung, } x, D^\alpha x, \dots, D^k x \in L^p(\Omega) \text{ komponentenweise} \}.$$

2) Sobolevnormen: Wir definieren

$$\|x\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k (\|D^\alpha x\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$\|x\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha x\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty.$$

Die Abkürzung α ist im allgemeinen als Multiindex zu lesen, z. B. $D_{t_1 t_2} x = D^{(1,2)} x$ mit $\alpha = (1, 2)$, $|\alpha| = 2$.

3) Für $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ definieren wir $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ als Abschluß von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W_p^k(\Omega)$ -Norm.

Nach unserer Definition gilt $W_p^0(\Omega) = L^p(\Omega)$. Alle Sobolevräume $W_p^k(\Omega)$ und $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$ sind mit den angegebenen Normen Banachräume. Für $1 < p < \infty$ sind die Räume $W_p^k(\Omega)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, reflexiv. Für $W_2^k(\Omega)$ schreibt man oft $H^k(\Omega)$; mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \langle D^\alpha x, D^\alpha y \rangle_{L^2(\Omega)}$$

wird $H^k(\Omega)$ zum Hilbertraum.

0.3 Approximation von Sobolevfunktionen mit C^∞ -Funktionen

Satz 0-05 ([EVANS 98], p. 251, Theorem 2): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ nur offen und beschränkt, $1 \leq p < \infty$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Dann kann jede Funktion $\hat{x} \in W_p^k(\Omega)$ durch eine Folge $\{x^N\}$, $W_p^k(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ approximiert werden: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x^N - \hat{x}\|_{W_p^k(\Omega)} = 0$. Im allgemeinen gilt jedoch $x^N \notin C^\infty(\overline{\Omega})$.

Satz 0-06 ([EVANS 98], p. 252, Theorem 3): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, $1 \leq p < \infty$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Dann kann jede Funktion $\hat{x} \in W_p^k(\Omega)$ durch eine Folge $\{x^N\}$, $W_p^k(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ approximiert werden: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x^N - \hat{x}\|_{W_p^k(\Omega)} = 0$.

0.4 Einbettungssätze und stetige Repräsentanten

Satz 0-07 (Satz von Rellich/Kondrachev, Teil 1) ([EVANS 98], p. 272, Theorem 1): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, $1 \leq p < m$, $k = 1$. Dann ist der Einbettungsoperator $E: W_p^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ linear und vollstetig (kompakt) für alle $1 \leq q \leq p^* = mp/(m-p)$.

Konsequenzen:

- 1) Jede Äquivalenzklasse $[x] \in W_p^1(\Omega)$ gehört auch zu den betreffenden L^q -Räumen.
- 2) Jede in $W_p^1(\Omega)$ -Norm beschränkte Folge $\{x^N\}$ besitzt eine Teilfolge $\{x^{N'}\}$, die in L^q -Norm konvergiert.
- 3) Wenn für $1 < p < m$ eine schwach konvergente Folge $\{x^N\}$, $W_p^1(\Omega) \rightharpoonup W_p^1(\Omega)$ $\hat{x} \in W_p^1(\Omega)$ gegeben ist, so ist sie beschränkt (als schwach konvergente Folge im reflexiven Raum) und besitzt insbesondere eine Teilfolge $\{x^{N'}\}$, $W_p^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ $\hat{x} \in W_p^1(\Omega)$, die in L^p -Norm gegen $\hat{x}$ konvergiert (da $p < p^* = mp/(m-p)$).

Satz 0-08 (Satz von Rellich/Kondrachev, Teil 2) ([ADAMS/FOURNIER 07], p. 168, Theorem 6.3., Part III): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, $m < p < \infty$, $k = 1$. Dann ist der Einbettungsoperator $E: W_p^1(\Omega) \rightarrow C^0(\overline{\Omega})$ linear und vollstetig (kompakt).

Konsequenzen:

- 1) Für $p > m$ besitzt jede Äquivalenzklasse $[x] \in W_p^1(\Omega)$ einen stetigen Repräsentanten.
- 2) Für $p > m$ besitzt jede in W_p^1 -Norm beschränkte Folge $\{x^N\}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{x^{N'}\}$.
- 3) Wenn für $m < p < \infty$ eine schwach konvergente Folge $\{x^N\}$, $W_p^1(\Omega) \rightharpoonup W_p^1(\Omega)$ $\hat{x} \in W_p^1(\Omega)$ gegeben ist, so ist diese Folge beschränkt und besitzt eine Teilfolge $\{x^{N'}\}$, $W_p^1(\Omega)$, wo die stetigen Repräsentanten gleichmäßig gegen den stetigen Repräsentanten von $\hat{x}$ konvergieren.

Satz 0-09 ([EVANS 98], p. 279, Theorem 4): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Dann gilt:

$$[x] \in W_\infty^1(\Omega) \iff x \text{ besitzt einen Lipschitz-stetigen Repräsentanten.}$$

Beispiel: Einbettungsverhalten von $W_p^1(\Omega)$ -Funktionen für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit C^1 -Rand. Für $p < 2$ gilt: $p^*(p) = 2p/(2-p)$. Wir betrachten folgende Fälle:

- $p = 1 \implies x \in L^2(\Omega).$
 $p \in (1, 2) \implies x \in L^2(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega)$, d. h. x liegt in "immer besseren" L^q -Räumen.
 $p = 2 \implies x \in \bigcap_{1 \leq q < \infty} L^q(\Omega)$ (siehe [ADAMS/FOURNIER 07], p. 168, Theorem 6.3., Part I).
 $p \in (2, \infty) \implies x$ besitzt einen stetigen Repräsentanten, der sogar eine Hölderbedingung erfüllt:
 $|x(s) - x(t)| \leq H \cdot |s - t|^{(p-2)/p}$ ([EVANS 98], p. 280).
 $p = \infty \implies x$ besitzt einen Lipschitz-stetigen Repräsentanten.

0.5 Randwerte

Für Funktionen $x \in C^0(\bar{\Omega})$ sind Randwerte durch stetige Fortsetzung von x auf $\partial\Omega$ eindeutig bestimmt, aber wie soll man sie für eine Äquivalenzklasse $x \in W_p^k(\Omega)$ definieren? $\partial\Omega$ ist im allgemeinen eine m -dimensionale Lebesguesche Nullmenge, und dort darf x beliebig abgeändert werden. Dieses Problem löst man durch die Einführung eines Randwertoperators (trace operator), unabhängig davon, ob x einen stetigen Repräsentanten besitzt oder nicht.

Satz 0–10 (Existenz des Randwertoperators) ([EVANS 98], p. 258, Theorem 1): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, $1 \leq p < \infty$, $k = 1$. Dann existiert ein linearer, stetiger Operator $T: W_p^1(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ mit den Eigenschaften

- a) $\|Tx\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \cdot \|x\|_{W_p^1(\Omega)} \quad \forall x \in W_p^1(\Omega).$
 b) Wenn $x \in W_p^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, so gilt $Tx = x|_{\partial\Omega}$.

Satz 0–11 (Nullrandwerte) ([EVANS 98], p. 259, Theorem 2): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, $1 \leq p < \infty$, $k = 1$. Für alle $x \in W_p^1(\Omega)$ gilt: $x \in \mathring{W}_p^1(\Omega) \iff Tx = \mathbf{o} \in L^p(\partial\Omega)$. Das bedeutet: Genau die $\mathring{W}_p^1$ -Funktionen haben "Nullrandwerte".

Satz 0–12 (Gaußscher Satz für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) ([EVANS/GARIEPY 92], p. 133, Theorem 1, (ii)): Unter den Voraussetzungen von Satz 0–10 gilt für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $x \in W_p^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} x(t) \left(D_{t_1} \varphi_1(t) + D_{t_2} \varphi_2(t) \right) dt = - \int_{\Omega} \begin{pmatrix} D_{t_1} x(t) \\ D_{t_2} x(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} dt + \int_{\partial\Omega} Tx(s) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \end{pmatrix}^T \mathbf{n}(s) d\lambda^1(s) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{n}(s)$ den Außeneinheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ in $s \in \partial\Omega$, und λ^1 das auf $\partial\Omega$ übertragene eindimensionale Lebesguesche Maß.

0.6 Lipschitzgebiete

Alle Sätze in den Abschnitten 3, 4 und 5 bleiben richtig, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ statt einer offenen, beschränkten Menge mit C^1 -Rand nur noch ein (beschränktes) Lipschitzgebiet im strengen Sinne ist. Hierfür verweisen wir auf [EVANS/GARIEPY 92], Kapitel 4, pp. 120 ff.

Literaturverzeichnis

- [ADAMS/FOURNIER 07] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F.: *Sobolev Spaces*. Academic Press / Elsevier; Amsterdam etc. 2007, 2. Aufl.
- [DUNFORD/SCHWARTZ 88] Dunford, N.; Schwartz, J. T.: *Linear Operators. Part I: General Theory*. Wiley-Interscience; New York etc. 1988
- [EVANS 98] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society; Providence 1998
- [EVANS/GARIEPY 92] Evans, L. C.; Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press; Boca Raton etc. 1992