

Arbeitsblatt: Quadraturformeln und zugeordnete Einschrittverfahren

A) Drei numerische Integrationsverfahren

- Rechteckregel: $Q_R(h) = h \cdot k_0$
- Trapezregel: $Q_T(h) = \frac{h}{2} (k_0 + k_1)$
- SIMPSONsche Regel: $Q_S(h) = \frac{h}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$ mit $k_1 = k_2$

B) Einschrittverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = \xi_0.$$

Auf einem Teilintervall $[t_n, t_n + h]$ berechnet man $x(t_n + h) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} \dot{x}(t) dt = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, x(t)) dt$

nach einer der obigen Regeln. Dabei muß man für die unbekannten x -Werte geeignete Näherungen benutzen.

Gegeben sind jeweils: $\xi_n \approx x(t_n)$, $h > 0$.

- EULER-CAUCHYSches Polygonzugverfahren (verwendet die Rechteckregel):

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + h \cdot k_0,$$

$$k_0 = f(t_n, \xi_n).$$

- EULER-HEUN-Verfahren (verwendet die Trapezregel):

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \frac{h}{2} (k_0 + k_1),$$

$$k_0 = f(t_n, \xi_n),$$

$$k_1 = f(t_n + h, \xi_n + k_0 \cdot h).$$

- RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung (verwendet die SIMPSONsche Regel):

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \frac{h}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3),$$

$$k_0 = f(t_n, \xi_n),$$

$$k_1 = f(t_n + h/2, \xi_n + k_0 \cdot h/2),$$

$$k_2 = f(t_n + h/2, \xi_n + k_1 \cdot h/2),$$

$$k_3 = f(t_n + h, \xi_n + k_2 \cdot h).$$