Zwei Gegenbeispiele bei der Relaxation von mehrdimensionalen Steuerungsproblemen

Marcus Wagner

Reihe Mathematik
M-05/2004

Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Fakultät 1, Institut für Mathematik
Postfach 10 13 44
D-03013 Cottbus

Zwei Gegenbeispiele bei der Relaxation von mehrdimensionalen Steuerungsproblemen

Marcus Wagner

1. Einleitung.

a) Eine Modellaufgabe.

Wir legen folgende mehrdimensionale Steuerungsaufgabe zugrunde:

$$\text{(P):}\quad F(x) = \int_\Omega f(\,Jx(t)\,)\,dt \longrightarrow \inf!\,;\quad x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\Omega)\,; \tag{1.1}$$

$$Jx(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1}(t) & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_m}(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{n\times m}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\,. \tag{1.2}$$

Darin wählen wir $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ als Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne, $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ als konvexen Körper mit $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ und $f(v)\colon\ \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ als stetige Funktion.

b) Gegenstand und Gliederung der vorliegenden Arbeit.

Das Problem (P) dient als Modellaufgabe innerhalb der Klasse der sogenannten Dieudonné-Rashevsky-Probleme: mehrdimensionale Steuerungsaufgaben, in denen partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung ($Jx(t) = G(t, x(t), u(t))$) zusammen mit allgemeineren Randbedingungen, Phasen- und Steuerbeschränkungen auftreten (siehe [6], [18], [19], [20], [21], [27]). Derartige Aufgaben ergeben sich beispielsweise bei der Anwendung des Prinzips der stationären Wirkung auf die Torsion prismatischer Stäbe (St.-Venantsche Torsion und Wölbkrafttorsion bei elastischem Materialverhalten (vergleiche [22], pp. 8 – 20), elastisch-plastische Torsion (siehe [25], p. 531 f., [26])) oder bei der Optimierung von Kenngrößen konvexer Körper, die mit Hilfe ihrer Stützfunktion in Kugelkoordinaten beschrieben werden (siehe [1] und [2], p. 149 f.). Variationsprobleme mit "convexity constraints" (vergleiche [5], [16], [17]) können ebenfalls als Dieudonné-Rashevsky-Probleme formuliert werden, indem man die Konvexität einer Lipschitzfunktion auf Ω durch die Variationsungleichung $\langle\, \nabla x(s) - \nabla x(t)\,,\, s-t\,\rangle \geqslant 0\ (\forall)\, s, t \in \mathrm{int}\,(\Omega)$ charakterisiert (vergleiche [28]). Analog zu Aufgaben der mehrdimensionalen Variationsrechnung kann die Existenz von (globalen) Minimalstellen erst nach Relaxation der Aufgabe garantiert werden. Im Falle unserer Modellaufgabe (P) müssen wir dazu eine Funktion $f^{\#}(v)\colon\ \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften aufsuchen:

(1) $f^{\#}(v) \leqslant f(v)$ für alle $v \in \mathrm{K}$, also $F^{\#}(x) = \displaystyle\int_\Omega f^{\#}(\,Jx(t)\,)\,dt \leqslant \int_\Omega f(\,Jx(t)\,)\,dt = F(x)$ für alle in (P) zulässigen Funktionen.

(2) Für alle Folgen in (P) zulässiger Funktionen $\{\,x^N\,\}$ mit $x^N \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^n_\infty(\Omega)}\, \hat{x}$ und $Jx^N \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^{nm}_\infty(\Omega)}\, J\hat{x}$ gilt: $F^{\#}(\hat{x}) \leqslant \liminf\limits_{N\to\infty} F^{\#}(x^N)$.

(3) Der (unter den obigen Voraussetzungen endliche) Minimalwert von (P) stimmt mit dem Minimalwert der folgenden Aufgabe $(\mathrm{P})^{\#}$ überein:

$$(\mathrm{P})^{\#}\colon\quad F^{\#}(x) = \int_\Omega f^{\#}(\,Jx(t)\,)\,dt \longrightarrow \inf!\,;\quad x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\Omega)\,;\quad Jx(t) \in \mathrm{K}\ \ (\forall)\, t \in \Omega\,. \tag{2}$$

Gelingt es, eine Funktion $f^{\#}\colon \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1) – (3) zu finden, so kann man in jeder Minimalfolge $\{\, x^N \,\}$ von (P) eine Teilfolge $\{\, x^{N'} \,\}$ finden, die zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen schwach* (im Sinne des $L^n_\infty(\Omega)$ bzw. des $L^{nm}_\infty(\Omega)$) gegen eine globale Minimalstelle $\hat{x}$ von $(\mathrm{P})^{\#}$ konvergiert. Für mehrdimensionale Aufgaben der Variationsrechnung ist $f^{\#}$ bekannt; unter geeigneten Voraussetzungen erhält man für $n = 1$ die konvexe Hüllfunktion f^c und für $n \geqslant 2$ die quasikonvexe Hüllfunktion f^{qc} von f (vergleiche [7] , p. 228 ff., Theorem 2.1.). Dagegen liegen für vergleichbare mehrdimensionale Steuerungsprobleme bisher ausschließlich Untersuchungen zum Fall $n = 1$ vor (vergleiche [11] , p. 327, Corollary 2.17., zusammen mit p. 334, Proposition 3.4., und p. 335 f., Proposition 3.6.). In [19] , [20] und [21] wurden notwendige Optimalitätsbedingungen für Aufgaben (P) für den Fall hergeleitet, daß der Integrand f durch seine konvexe Hüllfunktion f^c ersetzt werden darf. Es ist jedoch für jedes $n \geqslant 2$ möglich, eine Aufgabe (P) anzugeben, worin die Ersetzung von f durch f^c den Minimalwert absenkt (siehe [18] , pp. 20 – 23, Beispiel 2). Wie in den Aufgaben der mehrdimensionalen Variationsrechnung ist vielmehr zu erwarten, daß $f^{\#}$ eine quasikonvexe Funktion sein muß.

In der vorliegenden Arbeit sollen zwei Beispiele vorgestellt werden, mit denen die Eigenschaften der gesuchten Funktion $f^{\#}$ im Fall $n \geqslant 2$ näher bestimmt werden. Das erste Beispiel zeigt, daß man im allgemeinen nicht mit der Bildung der quasikonvexen Hüllfunktion für eine finite Fortsetzung von f auf den Gesamtraum $\mathbb{R}^{nm}$ auskommt. Vielmehr muß man f auf $\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ mit $(+\infty)$ fortsetzen und quasikonvexe Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\, (+\infty) \,\}$ untersuchen. Eine naheliegende Vermutung ist dann, daß man $f^{\#}$ erhält, indem man in der Darstellungsformel

$$f^{qc}(v) \;=\; \inf \Big\{ \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\, v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,),\; v + Jx(t) \in \mathbb{R}^{nm} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \Big\} \tag{3}$$

(siehe [7] , p. 201, Theorem 1.1., (4)) für die quasikonvexe Hüllfunktion nur solche Funktionen x berücksichtigt, die zusätzlich die Nebenbedingung $v + Jx(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$ einhalten. Die entsprechende eingeschränkt quasikonvexe Hüllfunktion f^* wurde in [8] (im Spezialfall bereits in [14]) eingeführt und untersucht (siehe Definition 2.9. unten). Aus dem zweiten Beispiel geht hervor, daß auch f^* im allgemeinen nicht die oben genannten Eigenschaften (1) – (3) besitzt. In [28] wird gezeigt, daß man stattdessen die unterhalbstetige Hüllfunktion von f^* benutzen muß.

Dementsprechend gliedern wir die Arbeit wie folgt: In Abschnitt 2 stellen wir Aussagen über konvexe und quasikonvexe Funktionen zusammen, wobei auch die letzteren Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annehmen dürfen; außerdem führen wir die Hüllfunktion f^* ein. Die angekündigten Beispiele folgen dann in den Abschnitten 3 und 4.

c) Zur Notation.

In der gesamten Arbeit sollen nur "eigentliche" Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ betrachtet werden; wir setzen stets $\mathrm{dom}\,(f) = \{\, v \in \mathbb{R}^{nm} \;\big|\; f(v) < (+\infty) \,\} \neq \emptyset$ voraus.

Definition 1.1. (Funktionenklasse $\mathcal{F}_\mathrm{K}$): *Sei* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *ein konvexer Körper mit* $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$. *Eine Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\, (+\infty) \,\}$ *gehört zur Klasse* $\mathcal{F}_\mathrm{K}$, *falls* $f \,\big|\, \mathrm{K} \in C^0(\,\mathrm{K}\,)$ *und* $f \,\big|\, (\,\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}\,) \equiv (+\infty)$.

Weitere Bezeichnungen: $\overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\Omega)$ — der Raum aller Lipschitz-stetigen n-Vektorfunktionen auf Ω, deren Komponenten auf $\partial\Omega$ verschwinden; $L^{nm}_\infty(\Omega)$ — der Raum aller (Äquivalenzklassen von) meßbaren, wesentlich beschränkten nm-Vektorfunktionen auf Ω; $C^0(\mathrm{K})$ — der Raum aller stetigen Funktionen auf K. $f \,\big|\, \mathrm{A}$ bezeichnet die Einschränkung von f auf A; die Abkürzung $(\forall)\, t \in \Omega$ ist zu lesen als "für fast alle $t \in \Omega$" bzw. "für alle $t \in \Omega$ mit Ausnahme einer m-dimensionalen Lebesgueschen Nullmenge".

2. Quasikonvexe Funktionen.

a) Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe.

Definition 2.1. (konvexe Funktion, Rang-1-konvexe Funktion): *1) Eine Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt konvex, wenn sie für alle* v', $v'' \in \mathbb{R}^{nm}$ *die Jensensche Ungleichung erfüllt:*

$$f(\,\lambda' v' + \lambda'' v''\,) \leqslant \lambda' f(v') + \lambda'' f(v'') \quad \forall\, \lambda',\ \lambda'' \geqslant 0\,,\ \lambda' + \lambda'' = 1\,. \tag{4}$$

2) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt Rang-1-konvex, wenn sie die Jensensche Ungleichung entlang aller Rang-1-Richtungen erfüllt: Für alle (als* (n,m)*-Matrizen aufgefaßten)* v', $v'' \in \mathbb{R}^{nm}$ *gilt*

$$\mathrm{Rg}\,(v' - v'') \leqslant 1 \implies f(\,\lambda' v' + \lambda'' v''\,) \leqslant \lambda' f(v') + \lambda'' f(v'') \quad \forall\, \lambda',\ \lambda'' \geqslant 0\,,\ \lambda' + \lambda'' = 1\,. \tag{5}$$

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ besteht für alle $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ die Implikation f konvex $\implies$ f Rang-1-konvex ([7], p. 102, Theorem 1.1., i)); für $n = 1$ oder $m = 1$ besteht sogar Äquivalenz f konvex $\iff$ f Rang-1-konvex ([7], p. 102, Theorem 1.1., ii)).

Definition 2.2. (konvexe Hüllfunktion f^c, Rang-1-konvexe Hüllfunktion f^{rc}): *Sei* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *nach unten beschränkt.*

1) Die konvexe Hüllfunktion $f^c\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist erklärt durch*

$$f^c(v) = \sup\big\{\, g(v) \;\big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{ konvex,}\ \ g(v) \leqslant f(v)\ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm} \,\big\}\,. \tag{6}$$

2) Die Rang-1-konvexe Hüllfunktion $f^{rc}\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist erklärt durch*

$$f^{rc}(v) = \sup\big\{\, g(v) \;\big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{ Rang-1-konvex,}\ \ g(v) \leqslant f(v)\ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm} \,\big\}\,. \tag{7}$$

Für jede nach unten beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ bestehen für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$ die Ungleichungen $f^c(v) \leqslant f^{rc}(v) \leqslant f(v)$.

Definition 2.3. (quasikonvexe Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, quasikonvexe Hüllfunktion f^{qc} für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$): *1)* (vergleiche [7], p. 99, Definition ii)) *Eine Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ *heißt quasikonvex, wenn sie Borel-meßbar und auf jeder kompakten Teilmenge von* $\mathbb{R}^{nm}$ *integrabel ist und für alle* $v \in \mathbb{R}^{nm}$ *die Morreysche Integralungleichung erfüllt:*

$$f(v) \leqslant \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\,dt \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\Omega)\,; \tag{8.1}$$

das ist gleichbedeutend mit

$$f(v) = \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,)\,,\ v + Jx(t) \in \mathbb{R}^{nm}\ \ (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,. \tag{8.2}$$

Hierbei entsteht $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *als Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne.*

2) Sei $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ *nach unten beschränkt. Die quasikonvexe Hüllfunktion* $f^{qc}\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ *ist erklärt durch*

$$f^{qc}(v) = \sup\big\{\, g(v) \;\big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \ \text{ quasikonvex,}\ \ g(v) \leqslant f(v)\ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm} \,\big\}\,. \tag{9}$$

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ bestehen für alle $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ folgende Implikationen: f konvex $\implies$ f quasikonvex $\implies$ f Rang-1-konvex ([7], p. 102, Theorem 1.1., i)); wenn $n = 1$ oder $m = 1$, so sind die Begriffe äquivalent: f konvex $\iff$ f quasikonvex $\iff$ f Rang-1-konvex ([7], p. 102, Theorem 1.1.,

ii)). Die Erweiterung von Definition 2.3., 1) auf Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ wird unten durch Definition 2.7. gegeben. Für jede nach unten beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ bestehen für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$ folgende Ungleichungen zwischen den Hüllfunktionen: $f^c(v) \leqslant f^{qc}(v) \leqslant f^{rc}(v) \leqslant f(v)$.

Satz 2.4. (Darstellung der konvexen Hüllfunktion f^c):
1) ([7], p. 201, Theorem 1.1., (1)) *Wenn $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ nach unten beschränkt ist, so folgt:*

$$f^c(v) = \inf\Big\{ \sum_{s=1}^{nm+1} \lambda_s\, f(v_s) \;\Big|\; \sum_s \lambda_s = 1\,,\ \sum_s \lambda_s\, v_s = v\,,\ 0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1\,,\ v_s \in \mathbb{R}^{nm}\,,\ 1 \leqslant s \leqslant nm+1 \Big\}\,. \tag{10}$$

2) Wenn $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ und Φ eine k-dimensionale Facette von K ist, $0 \leqslant k \leqslant nm$, so besitzt $f^c(v)$ für alle $v \in \Phi$ die Darstellung

$$f^c(v) = \inf\Big\{ \sum_{s=1}^{k+1} \lambda_s\, f(v_s) \;\Big|\; \sum_s \lambda_s = 1\,,\ \sum_s \lambda_s\, v_s = v\,,\ 0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1\,,\ v_s \in \Phi\,,\ 1 \leqslant s \leqslant k+1 \Big\}\,. \tag{11}$$

Insbesondere ist $f^c(v) = f(v)$ für alle $v \in \operatorname{ext}(\mathrm{K})$. Für alle $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ ist $f^c(v) = (+\infty)$. Außerdem ist f^c auf $\operatorname{int}(\mathrm{K})$ stetig und auf ganz $\mathbb{R}^{nm}$ unterhalbstetig.

3) Wenn $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ nach unten beschränkt und unterhalbstetig ist (dies gilt insbesondere für $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$), so genügt es, bei der Bildung von f^c nur affin-lineare Funktionen zuzulassen:

$$f^c(v) \;=\; \sup\Big\{ g(v) \;\Big|\; g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R} \quad \textit{affin-linear},\ \ g(v) \leqslant f(v)\ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm} \Big\}\,. \tag{12}$$

Beweis: 2) folgt unmittelbar aus 1). 3) ergibt sich aus [13], p. 163, Folgerung 1. ∎

b) Rechnen mit Jacobimatrizen.

Lemma 2.5. (Rechenregeln für Integrale mit $Jx(\,\cdot\,)$):
1) Für beliebige Funktionen $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\,\Omega\,)$ gilt $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t)\,dt = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

2) Gegeben seien eine Funktion $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\,\Omega\,)$ und eine Hyperebene $\mathrm{H} = \{\, v \in \mathbb{R}^{nm} \;\big|\; \langle\, a\,,\, v\,\rangle = 0 \,\}$ durch den Nullpunkt. Aus $\langle\, a\,,\, Jx(t)\,\rangle \geqslant 0$ $(\forall)\, t \in \Omega$ folgt dann: $\langle\, a\,,\, Jx(t)\,\rangle = 0$ $(\forall)\, t \in \Omega$.

Beweis: 1) ergibt sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes ([12], p. 133, Theorem 1, (ii)) auf $f(t) = x_i(t)$ sowie $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{j-1}(t), \varphi_{j+1}(t), \ldots, \varphi_m(t) \equiv 0$ und $\varphi_j(t) \equiv 1$.

2) Wenn $\langle\, a\,,\, Jx(t)\,\rangle > 0$ $(\forall)\, t \in \Omega_1 \subseteq \Omega$ mit $|\,\Omega_1\,| > 0$ und $\langle\, a\,,\, Jx(t)\,\rangle \geqslant 0$ auf $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, so folgt mit 1):

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\, \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t)\,dt \;=\; \int_{\Omega_1} \sum_{i,j} a_{ij}\, \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t)\,dt \;+\; \int_{\Omega_2} \sum_{i,j} a_{ij}\, \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t)\,dt \;=\; S_1 \;+\; S_2 \;=\; 0\,. \tag{13}$$

Wegen $S_1 > 0$ und $S_2 \geqslant 0$ entsteht ein Widerspruch. ∎

Lemma 2.6.: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ Abschluß eines Lipschitzgebiets im strengen Sinne und $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\Omega)$. Wenn die Jacobimatrix $Jx(t)$ für λ^m-fast alle $t \in \Omega$ in der Hyperebene $\mathrm{H}_{ij} = \{\, v \in \mathbb{R}^{nm} \;\big|\; v_{ij} = 0 \,\}$ liegt, so ist $x_i(t) \equiv 0$.*

Beweis: Wir betrachten zu $\tau \in \mathbb{R}^{m-1}$ den Schnitt $\mathrm{S}_\tau = \Omega \cap \{\, t \in \mathbb{R}^m \;\big|\; t_1 = \tau_1, \ldots, t_{j-1} = \tau_{j-1}, t_{j+1} = \tau_{j+1}, \ldots, t_m = \tau_m \,\}$. Nach Voraussetzung bilden die $t \in \Omega$ mit $\partial x_i(t)/\partial t_j \neq 0$ eine λ^m-Nullmenge; daraus folgt mit [10], p. 232, Satz 13.21.5., daß die $t_j \in \mathrm{S}_\tau$ mit $\partial x_i(\tau_1, \ldots, \tau_{j-1}, t_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_m)/\partial t_j \neq 0$ für

λ^{m-1}-fast alle $\tau \in \mathbb{R}^{m-1}$ eine λ^1-Nullmenge bilden. Nach [12], p. 164, Theorem 2, ist x_i für λ^{m-1}-fast alle $\tau \in \mathbb{R}^{m-1}$ entlang des Schnittes S_τ eine absolutstetige Funktion von t_j, das bedeutet:

$$x_i(\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, t_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_m) - x_i(\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, t_{j,0}, \tau_{j+1}, \dots, \tau_m) = \int_{t_{j,0}}^{t_j} \frac{\partial}{\partial t_j} x_i(\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tilde{t}_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_m)\, d\tilde{t}_j\,. \tag{14}$$

x_i bleibt also als Funktion von t_j entlang λ^{m-1}-fast allen Schnitten konstant. Jeder dieser Schnitte hat mindestens einen Punkt mit $\partial\Omega$ gemeinsam, wo x_i verschwindet; also ist $x_i \equiv 0$ entlang λ^{m-1}-fast allen Schnitten S_τ. Da umgekehrt x_i für festgehaltenes t_j auch als Funktion von τ stetig ist, ergibt sich hieraus $x_i(t) \equiv 0$. ∎

c) Quasikonvexe Funktionen, die den Wert $(+\infty)$ annehmen können.

Definition 2.7. (quasikonvexe Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$): *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften heißt quasikonvex:*

1) $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ *ist eine Borelsche Menge;*

2) $f \,\big|\, \mathrm{dom}\,(f)$ *ist Borel-meßbar und auf jeder kompakten Teilmenge von* $\mathrm{dom}\,(f)$ *integrierbar;*

3) für alle $v \in \mathbb{R}^{nm}$ erfüllt f die Morreysche Integralungleichung (siehe Definition 2.3., 1)).

Anmerkungen: a) In jeder Äquivalenzklasse $Jx \in L^{nm}_\infty(\Omega)$ können wir einen Borel-meßbaren Repräsentanten u wählen (es gibt einen Repräsentanten zweiter Bairescher Klasse (siehe [4], p. 406, Satz 5), der nach [4], p. 403, Satz 4 Borel-meßbar ist). Dann ergibt sich aus 1) und 2), daß die verketteten Funktionen $f(\,v + u(\,\cdot\,)\,)$ und $\mathbb{1}_{\mathrm{dom}\,(f)}(\,v + u(\,\cdot\,)\,)$ Borel-meßbar und wesentlich beschränkt, also integrierbar sind. Man beachte, daß die Abänderung des Integranden f auf einer Lebesgueschen Nullmenge des $\mathbb{R}^{nm}$ nicht statthaft ist.

b) Wir benutzen im übrigen die Konvention, wonach das Integral $\int_{\mathrm{A}} (+\infty)\, dt$ Null oder $(+\infty)$ zu setzen ist, je nachdem A eine m-dimensionale Lebesguesche Nullmenge ist oder positives Maß besitzt.

c) Genügt eine finite, meßbare, lokal beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ der Morreyschen Integralungleichung, so ist sie Rang-1-konvex und nach [7], p. 29, Theorem 2.3., 2) auf ganz $\mathbb{R}^{nm}$ stetig. Umgekehrt ist jede finite, stetige Funktion f meßbar und lokal beschränkt. Daher kann bei der Definition der Quasikonvexität für finite Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ von vornherein die Stetigkeit von f verlangt werden.

d) Weite Teile der vorhandenen Theorie quasikonvexer Funktionen wurden unter der Voraussetzung formuliert und bewiesen, daß die betreffenden Funktionen nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Indem wir auch den Wert $(+\infty)$ zulassen, müssen wir die Gültigkeit der entsprechenden Aussagen jeweils von neuem überprüfen.

Satz 2.8. (Morreysche Integralungleichung bei Funktionen mit $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{K}$): *Sei $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ ein konvexer Körper mit $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$. Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{K}$. $f \,\big|\, \mathrm{K}$ sei meßbar und beschränkt. Dann gelten folgende Aussagen:*

1) In allen Punkten $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ gilt die Morreysche Integralungleichung in der Gestalt $(+\infty) \leqslant (+\infty)$.

2) f erfüllt die Morreysche Integralungleichung in $v \in \mathrm{K}$ genau dann, wenn gilt:

$$f(v) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,. \tag{15}$$

3) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{K}$ eine k-dimensionale Facette von K, $0 \leqslant k \leqslant nm$. f erfüllt die Morreysche Integralungleichung in $v \in \Phi$ genau dann, wenn gilt:

$$f(v) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,)\,,\; v + Jx(t) \in \Phi \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,. \tag{16}$$

Beweis: 1) Sei $v \notin \mathrm{K}$ und $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\Omega)$. Wäre dann gleichzeitig $v + Jx(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$, so ergibt sich mit Lemma 2.5., 1): $v_{ij} = \dfrac{1}{|\,\Omega\,|} \displaystyle\int_{\Omega} \big(v_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t) \big)\, dt$, und aus der Konvexität des Integrals (siehe [3], Chap. IV, § 6, p. 204, Corollaire) entsteht ein Widerspruch, weil die Matrix $\Big(\dfrac{1}{|\,\Omega\,|} \displaystyle\int_{\Omega} \big(v_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t) \big)\, dt \Big)_{i,j}$ in $\mathrm{cl\,co}\,(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$ liegen muß. Also gilt $v + Jx(t) \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ auf einer t-Menge positiven Maßes. Da die Bedingungen 1), 2) aus Definition 2.7. erfüllt sind, ist dann $\displaystyle\int_{\Omega} f(\, v + Jx(t)\,)\, dt = (+\infty)$, und die Morreysche Integralungleichung gilt in der Gestalt $(+\infty) \leqslant (+\infty)$.

2) Ist $v \in \mathrm{K}$ und $v + Jx(t) \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ für eine t-Menge positiven Maßes, so gilt ebenfalls $\displaystyle\int_{\Omega} f(\, v + Jx(t)\,)\, dt = (+\infty)$, so daß die betreffenden Funktionen x bei der Infimumbildung nicht berücksichtigt werden müssen.

3) Nach 2) erfüllt f die Morreysche Integralungleichung in $v \in \Phi$ genau dann, wenn gilt:

$$f(v) \;=\; \inf \Big\{ \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_{\Omega} f(\, v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\,\Omega\,)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \Big\}\,. \tag{17}$$

Für $\Phi = \mathrm{K}$ ist die Behauptung richtig; sei also $\Phi \subset \mathrm{K}$. Dann existiert eine endliche Folge $\Phi = \Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \;...\; \subset \Phi_s = \mathrm{K}$ von Facetten von K mit der Eigenschaft, daß jeweils keine Facette $\widetilde{\Phi}_i$ mit $\Phi_i \subsetneqq \widetilde{\Phi}_i \subsetneqq \Phi_{i+1}$ existiert, $0 \leqslant i \leqslant s-1$. Daraus folgt: $\mathrm{Dim}\,(\Phi_0) < \mathrm{Dim}\,(\Phi_1) < \;...\; < \mathrm{Dim}\,(\Phi_s) = nm$, und nach [23], p. 63, ist jede Facette Φ_i eine exponierte Facette ihres Nachfolgers Φ_{i+1}. Sei zunächst $v \in \Phi$ und $v + Jx(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$. Dann folgt: $v \in \Phi_{s-1} = \Phi_s \cap \mathrm{H}_{s-1}$, wobei $\mathrm{H}_{s-1} = \{\, v \in \mathbb{R}^{nm} \;\big|\; \langle\, a_{s-1}\,,\, v \,\rangle = b_{s-1} \,\}$ Stützhyperebene für $\Phi_s = \mathrm{K}$ ist, das bedeutet $\langle\, a_{s-1}\,,\, v + Jx(t)\,\rangle \geqslant b_{s-1}$ $(\forall)\, t \in \Omega$. Also ist $\langle\, a_{s-1}\,,\, Jx(t)\,\rangle \geqslant 0$ $(\forall)\, t \in \Omega$, und daraus folgt mit Lemma 2.5., 2): $\langle\, a_{s-1}\,,\, Jx(t)\,\rangle = 0$ $(\forall)\, t \in \Omega$ und $v + Jx(t) \in \Phi_{s-1}$ $(\forall)\, t \in \Omega$. Nun ist $\Phi_{s-2} = \Phi_{s-1} \cap \mathrm{H}_{s-2}$ bezüglich Φ_{s-1} exponiert, wobei $\mathrm{H}_{s-2} = \{\, v \in \mathbb{R}^{nm} \;\big|\; \langle\, a_{s-2}\,,\, v \,\rangle = b_{s-2} \,\}$ Stützhyperebene für Φ_{s-1} ist, und allgemein ist $\Phi_{i-1} = \Phi_i \cap \mathrm{H}_{i-1}$ bezüglich Φ_i exponiert, $1 \leqslant i \leqslant s-1$. Man schließt wie oben, bis sich $v + Jx(t) \in \Phi_0 = \Phi$ $(\forall)\, t \in \Omega$ ergibt. ∎

d) Die eingeschränkt quasikonvexe Hüllfunktion f^*.

Definition 2.9. (auf K bezogene Hüllfunktion f^*): *Sei* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{nm}$ *ein konvexer Körper mit* $\mathfrak{o} \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ *und* $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$. *Dann definieren wir für alle* $v \in \mathbb{R}^{nm}$*:*

$$f^*(v) \;=\; \inf \Big\{ \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_{\Omega} f(\, v + Jx(t)\,)\, dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\,\Omega\,)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K} \;\; (\forall)\, t \in \Omega \Big\}\,. \tag{18}$$

Anmerkungen: a) Die Funktion f^* wurde in [14], p. 356, für den Spezialfall einer Normkugel K um den Nullpunkt und in [8], p. 27, Theorem 7.2., für beliebige konvexe Körper K eingeführt. In beiden Fällen wurde ebenfalls $f \in C^0(\mathrm{K})$ vorausgesetzt. In [8] wird a. a. O. gezeigt, daß f^* in allen $v \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ stetig ist und dort die Morreysche Integralungleichung erfüllt.

b) f^* entsteht als punktweises Infimum der überabzählbaren Familie $\{\, f_x \;\big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_{\infty}(\Omega) \,\}$ mit $f_x :\, \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ gemäß $v \longmapsto f_x(v) = \dfrac{1}{|\,\Omega\,|} \displaystyle\int_{\Omega} f(\, Jx(t) + v\,)\, dt\,.$

Satz 2.10. (Bildung von f^*): *Sei* $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ *und* Φ *eine* k*-dimensionale Facette von* K, $0 \leqslant k \leqslant nm$. *Dann gelten folgende Aussagen:*

1) Für alle $v \in \Phi$ gilt

$$f^*(v) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(\,v + Jx(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,)\,,\; v + Jx(t) \in \Phi \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,. \tag{19}$$

2) Insbesondere gilt für alle $v \in \operatorname{ext}(\mathrm{K})$: $f^*(v) = f(v)$.

3) Für alle $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ gilt $f^*(v) = (+\infty)$.

Beweis: 1) Aus Satz 2.8., 3) ergibt sich unmittelbar (20)

$$\inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(\,v{+}Jx(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,)\,,\; v{+}Jx(t) \in \mathrm{K} \;(\forall)\, t \in \Omega \,\Big\} = \inf\Big\{\; \ldots \;\; v{+}Jx(t) \in \Phi \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,.$$

2) Sei $v \in \operatorname{ext}(\mathrm{K})$. Nach 1) ist dann das Infimum bei der Bildung von $f^*(v)$ allein über $x = \mathfrak{o}$ zu erstrecken, also folgt $f^*(v) = f(v)$.

3) Aus dem Beweis von Satz 2.8., 2) ist ersichtlich, daß für $v \in \mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$ das Infimum in Definition 2.9. über eine leere Menge gebildet wird und daher $(+\infty)$ beträgt. ∎

Satz 2.11. (f^* als obere Schranke für quasikonvexe Funktionen $g \leqslant f$): *1) Sei $f \in \mathcal{F}_\mathrm{K}$. Für jede quasikonvexe Funktion $g\colon \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt: Aus $g(v) \leqslant f(v)\ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm}$ folgt $g(v) \leqslant f^*(v)\ \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm}$.*

2) Wenn $f \in \mathcal{F}_\mathrm{K}$, so gilt:

$$f^c(v) \;\leqslant\; f^*(v) \;\leqslant\; f(v) \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^{nm}\;. \tag{21}$$

Beweis: 1) Sei g wie vorausgesetzt, aber $f^*(v_0) < g(v_0)$ für ein $v_0 \in \mathrm{K}$. Dann existiert ein $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\Omega)$ mit $v_0 + Jx(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$ und

$$f^*(v_0) \;\leqslant\; \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(\,v_0 + Jx(t)\,)\,dt \;<\; g(v_0)\,. \tag{22}$$

Das führt zum Widerspruch, denn für die quasikonvexe Funktion g und das soeben gewählte x gilt gleichzeitig

$$g(v_0) \;\leqslant\; \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega g(\,v_0 + Jx(t)\,)\,dt \;\leqslant\; \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(\,v_0 + Jx(t)\,)\,dt\,. \tag{23}$$

2) Nach Satz 2.4., 3) entsteht f^c zu $f \in \mathcal{F}_\mathrm{K}$ als punktweises Supremum aller affin-linearen Funktionen $g \leqslant f$. Diese Funktionen sind quasikonvex, also gilt für beliebige $v \in \mathbb{R}^{nm}$ und $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\Omega)$:

$$g(v) \;\leqslant\; \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega g(\,v + Jx(t)\,)\,dt \;\leqslant\; \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f^c(\,v + Jx(t)\,)\,dt \quad\Longrightarrow \tag{24.1}$$

$$f^c(v) \;=\; \sup_{g\,\in\,\ldots} g(v) \;\leqslant\; \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f^c(\,v + Jx(t)\,)\,dt\,, \tag{24.2}$$

und f^c erfüllt die Morreysche Integralungleichung. Als unterhalbstetige Funktion mit $\operatorname{dom}(f^c) = \mathrm{K}$ genügt f^c auch den Bedingungen 1) und 2) aus Definition 2.7. Die Ungleichung $f^c(v) \leqslant f^*(v)$ ergibt sich dann aus Teil 1), und die Ungleichung $f^*(v) \leqslant f(v)$ folgt aus der Zulässigkeit von $x \equiv \mathfrak{o}$ bei der Infimumbildung für alle $v \in \mathrm{K}$. ∎

3. Erstes Beispiel: Endliche oder unendliche Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^{nm} \setminus \mathrm{K}$?

Das folgende Beispiel bezieht sich auf Funktionen von Argumenten $v = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die wir als $(2,2)$-Matrizen auffassen. Als Norm benutzen wir $|\,v\,| = \big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^{1/2}$. Wir geben einen konvexen

Körper $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine Funktion $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ an, so daß für jede finite, stetige Fortsetzung $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ von $f\,|\,\mathrm{K}$ auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ein Punkt $v \in \mathrm{K}$ mit $\widetilde{f}^c(v) \leqslant \widetilde{f}^{qc}(v) < f^c(v)$ existiert. (Demzufolge kann $f^c\,|\,\mathrm{K}$ nicht zu einer endlichen, konvexen Funktion auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ fortgesetzt werden, vergleiche [24], p. 505, Theorem 1.) Nach Satz 2.4., 2) und dem Beweis zu Satz 2.11., 2) handelt es sich jedoch bei f^c um eine unterhalbstetige, quasikonvexe Funktion. Also ist keine der Funktionen $\widetilde{f}^{qc}$ die größte quasikonvexe Funktion $g \leqslant f$. (Die Idee zur Konstruktion von K läßt sich bis zu [15], p. 698 f., zurückverfolgen.)

Definition 3.1.: *Gegeben seien die Punkte* $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und die konvexe Menge* $\mathrm{C} = \{\, \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\big|\; b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 1 \,\}$. *Wir erklären* $\mathrm{K} = \mathrm{co}\big(\{\, v_1 \,\} \cup \mathrm{C}\big) \cup \mathrm{co}\big(\{\, v_2 \,\} \cup \mathrm{C}\big) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ *und* $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \overline{\mathbb{R}}$ *gemäß*

$$f(v) = \begin{cases} \big(a^2 - 1\big)^2 & \big|\; v \in \mathrm{K}\,; \\ (+\infty) & \big|\; v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \mathrm{K}\,. \end{cases} \tag{25}$$

Lemma 3.2. (Eigenschaften von K): *1)* K *ist abgeschlossen und konvex mit* $\mathfrak{o}_4 \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ *und besitzt die Darstellung* $\mathrm{K} = \{\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\big|\; -1 \leqslant a \leqslant 1\,,\ (b + |\,a\,|)^2 + c^2 + d^2 \leqslant (1 - |\,a\,|)^2 \,\}$.
2) $\mathrm{ext}\,(\mathrm{K}) = \{\, v_1\,,\, v_2 \,\} \cup \big(\mathrm{ext}\,(\mathrm{C}) \setminus \{\, \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\}\big)$.

Beweis: 1) K kann als Durchschnitt der von C erzeugten abgeschlossenen, konvexen Kegel K_1 und K_2 mit Spitze in v_1 bzw. v_2 aufgefaßt werden und ist daher ebenfalls abgeschlossen und konvex. Die Darstellung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Schnitte von K mit den Hyperebenen $a = const.$ durch zentrische Stauchung von C bezüglich der Zentren v_1 bzw. v_2 entstehen. Aus demselben Grund enthält K eine offene Umgebung $\{\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\big|\; -\varepsilon < a < \varepsilon\,,\ b^2 + c^2 + d^2 < \varepsilon \,\}$ für $\mathfrak{o}_4$.

2) Die Extremalstrahlen der Kegel K_1 bzw. K_2 sind genau die Strahlen $\overrightarrow{v_1\, v_0}$ bzw. $\overrightarrow{v_2\, v_0}$ mit $v_0 \in \mathrm{ext}\,(\mathrm{C})$. Deshalb enthält $\mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$ offensichtlich v_1 und v_2, während $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\, v_1 + \frac{1}{2}\, v_2$ nicht zu $\mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$ gehört. Alle anderen Punkte von $\mathrm{ext}\,(\mathrm{C})$ entstehen als Schnittpunkte je eines Extremalstrahls von K_1 und K_2 und liegen deshalb in $\mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$. Die restlichen Punkte von K sind offensichtlich keine Extremalpunkte. ∎

Satz 3.3. (Eigenschaften von f): *Für die Funktion f aus Definition 3.1. gilt:*
1) $f\,|\,\mathrm{K}$ *gehört zu* $W^1_\infty(\mathrm{K})$ *und ist auf* $\mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ *beliebig oft differenzierbar.*
2) Für alle $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{ext}\,(\mathrm{C})$ *mit* $b \neq (-1)$ *ist* $f^c\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 1$, *dagegen ist* $f^c\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 0$.
3) Für jede finite, stetige Fortsetzung $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *von* $f\,|\,\mathrm{K}$ *gilt* $\widetilde{f}^{qc}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \leqslant 0$. *Also ist* $\widetilde{f}^c(v) \leqslant \widetilde{f}^{qc}(v) < f^c(v)$ *für alle Punkte* $v \in \mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$, *die hinreichend nahe an* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *liegen.*

Beweis: 1) $f\,|\,\mathrm{K}$ entsteht durch Einschränkung eines Polynoms auf K.

2) Nach Lemma 3.2., 2) liegen die zuerst genannten Punkte in $\mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$, deshalb ergibt sich $f^c\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 1$ aus Satz 2.4., 2). Wegen $f \geqslant 0$ ist auch $f^c\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \geqslant 0$, andererseits folgt aus demselben Satz: $f^c\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = f^c(\,\frac{1}{2}\, v_1 + \frac{1}{2}\, v_2\,) \leqslant \frac{1}{2} f(v_1) + \frac{1}{2} f(v_2) = 0$.

3) Sei $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ eine finite, stetige Fortsetzung von $f\,|\,\mathrm{K}$ auf den Gesamtraum. Wegen $\mathrm{Rg}\,(v_1 - v_2) = \mathrm{Rg}\,\big(\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\big) = \mathrm{Rg}\,\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$ folgt:

$$\widetilde{f}^{rc}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \leqslant \frac{1}{2}\, \widetilde{f}^{rc}(v_1) + \frac{1}{2}\, \widetilde{f}^{rc}(v_2) \leqslant \frac{1}{2}\, \widetilde{f}(v_1) + \frac{1}{2}\, \widetilde{f}(v_2) = \frac{1}{2}\, f(v_1) + \frac{1}{2}\, f(v_2) = 0 \tag{26}$$

und $\widetilde{f}^c\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \leqslant \widetilde{f}^{qc}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \leqslant \widetilde{f}^{rc}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die finite, quasikonvexe Funktion $\widetilde{f}^{qc}$ ist in $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ stetig, also existiert eine Umgebung U von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\widetilde{f}^c(v) \leqslant \widetilde{f}^{qc}(v) < \frac{1}{2}$ für alle $v \in \mathrm{U}$, während nach 2) $f^c(v) = 1$ für alle $v \in \mathrm{U} \cap \mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$ gilt. ∎

4. Zweites Beispiel: Bestimmung von f^* auf dem vierdimensionalen Würfel $\mathrm{K} = [\,-1\,,\,1\,]^4$.

Sei $\mathrm{K} = [\,-1\,,\,1\,]^4 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir klassifizieren zunächst die Facetten von K und bestimmen zu beliebigem $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ die Darstellung von f^* auf dem Rand von K. Dann geben wir eine Funktion $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ an, für welche f^* nicht mit der Relaxation $f^{\#}$ gemäß Abschnitt 1. b) übereinstimmt.

a) Klassifikation der Facetten von K.

Zum Beispiel bezeichnen wir die zweidimensionale Facette $[\,-1\,,\,1\,] \times \{\,1\,\} \times \{\,-1\,\} \times [\,-1\,,\,1\,] = \mathrm{K} \cap \{\, v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid v_{12} = 1\,,\, v_{21} = -1 \,\}$ mit $\Phi_{\circ+-\circ}$. Damit können wir die Facetten von K wie folgt klassifizieren:

- eine (uneigentliche) vierdimensionale Facette: $\mathrm{K} = \Phi_{\circ\circ\circ\circ}$ selbst;
- 8 dreidimensionale Facetten (Würfel):

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{W}_1 = \Phi_{+\circ\circ\circ}\,, & \mathrm{W}_3 = \Phi_{\circ+\circ\circ}\,, & \mathrm{W}_5 = \Phi_{\circ\circ+\circ}\,, & \mathrm{W}_7 = \Phi_{\circ\circ\circ+}\,, \\
\mathrm{W}_2 = \Phi_{-\circ\circ\circ}\,, & \mathrm{W}_4 = \Phi_{\circ-\circ\circ}\,, & \mathrm{W}_6 = \Phi_{\circ\circ-\circ}\,, & \mathrm{W}_8 = \Phi_{\circ\circ\circ-}\,;
\end{array}$$

- 24 zweidimensionale Facetten (Quadrate):

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{Q}_1 = \Phi_{++\circ\circ}\,, & \mathrm{Q}_7 = \Phi_{-+\circ\circ}\,, & & & & & & \subset \mathrm{W}_3 \\
\mathrm{Q}_2 = \Phi_{+-\circ\circ}\,, & \mathrm{Q}_8 = \Phi_{--\circ\circ}\,, & & & & & & \subset \mathrm{W}_4 \\
\mathrm{Q}_3 = \Phi_{+\circ+\circ}\,, & \mathrm{Q}_9 = \Phi_{-\circ+\circ}\,, & \mathrm{Q}_{13} = \Phi_{\circ++\circ}\,, & \mathrm{Q}_{17} = \Phi_{\circ-+\circ}\,, & & & & \subset \mathrm{W}_5 \\
\mathrm{Q}_4 = \Phi_{+\circ-\circ}\,, & \mathrm{Q}_{10} = \Phi_{-\circ-\circ}\,, & \mathrm{Q}_{14} = \Phi_{\circ+-\circ}\,, & \mathrm{Q}_{18} = \Phi_{\circ--\circ}\,, & & & & \subset \mathrm{W}_6 \\
\mathrm{Q}_5 = \Phi_{+\circ\circ+}\,, & \mathrm{Q}_{11} = \Phi_{-\circ\circ+}\,, & \mathrm{Q}_{15} = \Phi_{\circ+\circ+}\,, & \mathrm{Q}_{19} = \Phi_{\circ-\circ+}\,, & \mathrm{Q}_{21} = \Phi_{\circ\circ++}\,, & \mathrm{Q}_{23} = \Phi_{\circ\circ-+}\,, & & \subset \mathrm{W}_7 \\
\mathrm{Q}_6 = \Phi_{+\circ\circ-}\,, & \mathrm{Q}_{12} = \Phi_{-\circ\circ-}\,, & \mathrm{Q}_{16} = \Phi_{\circ+\circ-}\,, & \mathrm{Q}_{20} = \Phi_{\circ-\circ-}\,, & \mathrm{Q}_{22} = \Phi_{\circ\circ+-}\,, & \mathrm{Q}_{24} = \Phi_{\circ\circ--}\,; & & \subset \mathrm{W}_8 \\
\subset \mathrm{W}_1 & \subset \mathrm{W}_2 & \subset \mathrm{W}_3 & \subset \mathrm{W}_4 & \subset \mathrm{W}_5 & \subset \mathrm{W}_6 &&
\end{array}$$

- 32 eindimensionale Facetten (Strecken):

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{S}_1 = \Phi_{+++\circ}\,, & \mathrm{S}_5 = \Phi_{+-+\circ}\,, & & & \subset \mathrm{Q}_3 \\
\mathrm{S}_2 = \Phi_{++-\circ}\,, & \mathrm{S}_6 = \Phi_{+--\circ}\,, & & & \subset \mathrm{Q}_4 \\
\mathrm{S}_3 = \Phi_{++\circ+}\,, & \mathrm{S}_7 = \Phi_{+-\circ+}\,, & \mathrm{S}_9 = \Phi_{+\circ++}\,, & \mathrm{S}_{11} = \Phi_{+\circ-+}\,, & \subset \mathrm{Q}_5 \\
\mathrm{S}_4 = \Phi_{++\circ-}\,, & \mathrm{S}_8 = \Phi_{+-\circ-}\,, & \mathrm{S}_{10} = \Phi_{+\circ+-}\,, & \mathrm{S}_{12} = \Phi_{+\circ--}\,, & \subset \mathrm{Q}_6 \\
\subset \mathrm{Q}_1 & \subset \mathrm{Q}_2 & \subset \mathrm{Q}_3 & \subset \mathrm{Q}_4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{S}_{13} = \Phi_{-++\circ}\,, & \mathrm{S}_{17} = \Phi_{--+\circ}\,, & & & \subset \mathrm{Q}_9 \\
\mathrm{S}_{14} = \Phi_{-+-\circ}\,, & \mathrm{S}_{18} = \Phi_{---\circ}\,, & & & \subset \mathrm{Q}_{10} \\
\mathrm{S}_{15} = \Phi_{-+\circ+}\,, & \mathrm{S}_{19} = \Phi_{--\circ+}\,, & \mathrm{S}_{21} = \Phi_{-\circ++}\,, & \mathrm{S}_{23} = \Phi_{-\circ-+}\,, & \subset \mathrm{Q}_{11} \\
\mathrm{S}_{16} = \Phi_{-+\circ-}\,, & \mathrm{S}_{20} = \Phi_{--\circ-}\,, & \mathrm{S}_{22} = \Phi_{-\circ+-}\,, & \mathrm{S}_{24} = \Phi_{-\circ--}\,, & \subset \mathrm{Q}_{12} \\
\subset \mathrm{Q}_7 & \subset \mathrm{Q}_8 & \subset \mathrm{Q}_9 & \subset \mathrm{Q}_{10} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & & & \\
\mathrm{S}_{13} & \mathrm{S}_{14} & & & \\
\mathrm{S}_{25} = \Phi_{\circ+++}\,, & \mathrm{S}_{27} = \Phi_{\circ+-+}\,, & \mathrm{S}_3 & \mathrm{S}_{15} & \subset \mathrm{Q}_{15} \\
\mathrm{S}_{26} = \Phi_{\circ++-}\,, & \mathrm{S}_{28} = \Phi_{\circ+--}\,, & \mathrm{S}_4 & \mathrm{S}_{16} & \subset \mathrm{Q}_{16} \\
\subset \mathrm{Q}_{13} & \subset \mathrm{Q}_{14} &&&
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{S}_5 & \mathrm{S}_6 & & & \\
\mathrm{S}_{17} & \mathrm{S}_{18} & & & \\
\mathrm{S}_{29} = \Phi_{\circ-++}\,, & \mathrm{S}_{31} = \Phi_{\circ--+}\,, & \mathrm{S}_7 & \mathrm{S}_{19} & \subset \mathrm{Q}_{19} \\
\mathrm{S}_{30} = \Phi_{\circ-+-}\,, & \mathrm{S}_{32} = \Phi_{\circ---}\,; & \mathrm{S}_8 & \mathrm{S}_{20} & \subset \mathrm{Q}_{20} \\
\subset \mathrm{Q}_{17} & \subset \mathrm{Q}_{18} &&&
\end{array}$$

- und 16 nulldimensionale Facetten (die aus je genau einem Extremalpunkt bestehen).

b) Berechnung von f^* auf $\partial\mathrm{K}$.

Satz 4.1. (Bestimmung von f^* auf dem Rand des vierdimensionalen Würfels $\mathrm{K} = [\,-1\,,\,1\,]^4$):
Sei $\mathrm{K} = [\,-1\,,\,1\,]^4 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ *und* $f \in \mathfrak{F}_{\mathrm{K}}$.

1) Für alle $v_0 \in \mathrm{ext}\,(\mathrm{K})$ *gilt* $f^*(v_0) = f(v_0)$.

2) Wir betrachten die Teilmengen $\mathfrak{F}_1 = \{\,\mathrm{S}_1,\ \dots\,,\,\mathrm{S}_{32}\,\}$ *und* $\mathfrak{F}_{2,3} = \{\,\mathrm{Q}_3,\ \dots\,,\,\mathrm{Q}_6,\,\mathrm{Q}_9,\ \dots\,,\,\mathrm{Q}_{20}\,\}$ *von ein- bzw. zweidimensionalen Facetten von* K. *Wenn* $\varPhi \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_{2,3}$, *so gilt für alle* $v_0 \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)$: $f^*(v_0) = f(v_0)$.

3) Wir betrachten die Teilmengen $\mathfrak{F}_{2,1} = \{\,\mathrm{Q}_1,\,\mathrm{Q}_2,\,\mathrm{Q}_7,\,\mathrm{Q}_8\,\}$ *und* $\mathfrak{F}_{2,2} = \{\,\mathrm{Q}_{21},\ \dots\,,\,\mathrm{Q}_{24}\,\}$ *von zweidimensionalen Facetten von* K. *Wenn* $\varPhi \in \mathfrak{F}_{2,1} \cup \mathfrak{F}_{2,2}$, *so gilt für alle* $v_0 \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)$: $f^*(v_0) = (f\,|\,\varPhi)^c(v_0)$.

4) Wir betrachten die Teilmengen $\mathfrak{F}_{3,1} = \{\,\mathrm{W}_3,\,\mathrm{W}_4\,\}$, $\mathfrak{F}_{3,2} = \{\,\mathrm{W}_1,\,\mathrm{W}_2\,\}$, $\mathfrak{F}_{3,3} = \{\,\mathrm{W}_7,\,\mathrm{W}_8\,\}$ *und* $\mathfrak{F}_{3,4} = \{\,\mathrm{W}_5,\,\mathrm{W}_6\,\}$ *von dreidimensionalen Facetten von* K. *Wenn* $\varPhi \in \mathfrak{F}_{3,1}$ *und* $v_0 = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)$, *so gilt:* $f^*(v_0) = \big(\,f\,|\,\varPhi \cap \{\,v \in \mathbb{R}^{2\times 2}\ \big|\ v = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\,\}\,\big)^c(v_0)$. *Für* $\varPhi \in \mathfrak{F}_{3,2}$ *und* $v_0 = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)$ *gilt:* $f^*(v_0) = \big(\,f\,|\,\varPhi \cap \{\,v \in \mathbb{R}^{2\times 2}\ \big|\ v = \left(\begin{smallmatrix} a & b_0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\,\}\,\big)^c(v_0)$. *Entsprechendes gilt für* $v_0 \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)$, $\varPhi \in \mathfrak{F}_{3,3} \cup \mathfrak{F}_{3,4}$.

Beweis: 1) Ergibt sich aus Satz 2.10., 2).

2) Sei $\varPhi \in \mathfrak{F}_{2,3} \cup \mathfrak{F}_1$ und $v_0 \in \mathrm{ri}\,(\varPhi)$. Nach Satz 2.10., 1) gilt

$$f^*(v_0) \;=\; \inf\Big\{\,\frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(\,v_0 + Jx(t)\,)\,dt\ \Big|\ x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,n}_\infty(\,\Omega\,)\,,\ v_0 + Jx(t) \in \varPhi\ \ (\forall)\,t \in \Omega\,\Big\}\,. \tag{27}$$

Andererseits folgt mit Lemma 2.6.: Ist $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\infty(\Omega)$ mit $v_0 + Jx(t) \in \varPhi$ $(\forall)\,t \in \Omega$ gegeben, so gilt $Jx(t) \in \mathrm{H}_{1j} \cap \mathrm{H}_{2k}$ für gewisse $j,\,k \in \{\,1\,,\,2\,\}$ $(\forall)\,t \in \Omega$, und deshalb $x_1(t) = x_2(t) \equiv 0$. Tatsächlich ist also nur die Funktion $x = \mathfrak{o}$ bei der Bildung von $f^*(v_0)$ zulässig, und daraus folgt $f^*(v_0) = f(v_0)$.

3) Wir betrachten jetzt eine Facette $\varPhi \in \mathfrak{F}_{2,1} \cup \mathfrak{F}_{2,2}$; o. E. d. A. sei $\varPhi = \mathrm{Q}_1$ und $v_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & c_0 \\ 1 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{ri}\,(\mathrm{Q}_1)$. Nach Satz 2.10., 1) kommen bei der Bildung von $f^*(v_0)$ wiederum ausschließlich die Werte von f auf $\varPhi$ in Betracht, und wie im vorigen Schritt ist $x_1(t) \equiv \mathfrak{o}$:

$$f^*(v_0) \;=\; \inf\Big\{\,\frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega f(\,1,\,1,\,c_0 + \frac{\partial x}{\partial t_1}(t),\,d_0 + \frac{\partial x}{\partial t_2}(t)\,)\,dt\ \Big|\ x \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\Omega)\,,\ -1 - c_0 \leqslant \frac{\partial x}{\partial t_1}(t) \leqslant 1 - c_0\,,$$
$$-1 - d_0 \leqslant \frac{\partial x}{\partial t_2}(t) \leqslant 1 - d_0\ \ (\forall)\,t \in \Omega\,\Big\}\,. \tag{28}$$

Nach Satz 2.11., 2) gilt $f^c(v_0) \leqslant f^*(v_0)$, und nach Satz 2.4., 2) finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen λ_1, $\lambda_2 \in [\,0\,,\,1\,]$ und Punkte $\left(\begin{smallmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & c_2 \\ 1 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Q}_1$ mit

$$f^c(v_0) \;\leqslant\; \lambda_1\,f(1,1,c_1,d_1) + \lambda_2\,f(1,1,c_2,d_2) \;\leqslant\; f^c(v_0) + \varepsilon \quad \text{sowie} \tag{29.1}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1\,,\ \lambda_1\,(c_1 - c_0) + \lambda_2\,(c_2 - c_0) = 0\,,\ \lambda_1\,(d_1 - d_0) + \lambda_2\,(d_2 - d_0) = 0\,. \tag{29.2}$$

Nun konstruieren wir eine Pyramide $\mathrm{C} \subset \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche $\mathrm{G} = \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_4 \subset \Omega$ und Spitze P_5, so daß die Strecken $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3$ und $\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4$ parallel zur t_1-Achse bzw. zur t_2-Achse liegen. Im senkrechten Schnitt $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(\mathrm{P}_5\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3) = c_1 - c_0\,,\ \tan\sphericalangle(\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_5) = -(c_2 - c_0)\,; \tag{30}$$

im senkrechten Schnitt $\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4\,\mathrm{P}_5$ gelte

$$\tan\sphericalangle(\mathrm{P}_5\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4) = d_1 - d_0\,,\ \tan\sphericalangle(\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4\,\mathrm{P}_5) = -(d_2 - d_0)\,. \tag{31}$$

Nun bilden wir die Familie $\mathfrak{G}$ aller zu C homothetischen Pyramiden, deren Grundflächen ebenfalls ganz in Ω liegen. Nach dem Überdeckungssatz von Vitali ([9], p. 231 f., Corollary 10.6.) existiert für $\operatorname{int}(\Omega)$ eine höchstens abzählbare Überdeckung mit paarweise disjunkten Grundflächen $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots \subseteq \operatorname{int}(\Omega)$ derartiger Pyramiden, so daß $\left|\operatorname{int}(\Omega) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{G}_i\right| = 0$ gilt. Indem wir über jeder Grundfläche G_i den Mantel der Pyramide C_i mit dem Graphen einer Funktion x identifizieren und auf der Nullmenge $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{G}_i$ $x(t) = 0$ setzen, erhalten wir eine Funktion, die bei der Bildung des Infimums $f^*(v_0)$ zulässig ist, und für diese Funktion gilt:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\,1,\,1,\,c_0 + \frac{\partial x}{\partial t_1}(t),\,d_0 + \frac{\partial x}{\partial t_2}(t)\,)\,dt = \lambda_1\, f(1,1,c_1,d_1) + \lambda_2\, f(1,1,c_2,d_2)\,. \tag{32}$$

Zusammen folgt: $f^*(v_0) = f^c(v_0) = (\,f \,\big|\, \mathrm{Q}_1\,)^c(v_0)$. Für andere Facetten $\Phi \in \mathfrak{F}_{2,1} \cup \mathfrak{F}_{2,2}$ schließt man ebenso.
4) Wählen wir jetzt eine Facette $\Phi \in \bigcup_{s=1}^{4} \mathfrak{F}_{3,s}$, o. E. d. A. $\Phi = \mathrm{W}_1$, und $v_0 \in \operatorname{ri}(\mathrm{W}_1)$, so folgt für $x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\infty}(\Omega)$ mit $v_0 + Jx(t) \in \mathrm{W}_1$ $(\forall)\, t \in \Omega$ wie bisher $x_1(t) \equiv 0$. $f^*(v_0)$ besitzt also die Darstellung

$$\begin{aligned} f^*(v_0) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\,1,\,b_0,\,c_0 + \frac{\partial x}{\partial t_1}(t),\,d_0 + \frac{\partial x}{\partial t_2}(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{\infty}(\,\Omega\,)\,, \\ \Big(1\,,\,b_0\,,\,c_0 + \frac{\partial x}{\partial t_1}(t)\,,\,d_0 + \frac{\partial x}{\partial t_2}(t)\Big)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{W}_1 \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,, \end{aligned} \tag{33}$$

so daß bei der Bildung von $f^*(v_0)$ erneut nur die Werte von f auf einer zweidimensionalen konvexen Teilmenge von W_1, nämlich $\mathrm{W}_1 \cap \{\, v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\big|\; v = \left(\begin{smallmatrix} a & b_0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,\}$ in Betracht kommen. Nun wird der Beweis wie in 3) beendet.
■

c) Eine Funktion $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{K}}$ mit $f^* \neq f^{\#}$.

Definition 4.2.: *Wir benutzen erneut den vierdimensionalen Würfel* $\mathrm{K} = [\,-1\,,\,1\,]^4 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ *und erklären* $f\colon\, \mathbb{R}^{2\times 2} \to \overline{\mathbb{R}}$ *durch*

$$f(v) \;=\; \begin{cases} a + b + c + \big(\,1 - d^2\,\big) & \big|\; v \in \mathrm{K}\,; \\ \qquad (+\infty) & \big|\; v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \mathrm{K}\,. \end{cases} \tag{34}$$

Satz 4.3. (Berechnung von f^*): *Wir verwenden die Bezeichnungen aus Satz 4.1. Dann hat die Hüllfunktion f^* zur Funktion f aus Definition 4.2. folgende Darstellung:*

$$f^*(v) \;=\; \begin{cases} a + b + c + \big(\,1 - d^2\,\big) & \big|\; v \in \operatorname{ext}(\mathrm{K}) \text{ oder } v \in \operatorname{ri}(\Phi)\,,\;\; \Phi \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_{2,3} \cup \mathfrak{F}_{3,4}\,; \\ a + b + c & \big|\; v \in \operatorname{int}(\mathrm{K}) \text{ oder } v \in \operatorname{ri}(\Phi)\,,\;\; \Phi \in \mathfrak{F}_{2,1} \cup \mathfrak{F}_{2,2} \cup \mathfrak{F}_{3,1} \cup \mathfrak{F}_{3,2} \cup \mathfrak{F}_{3,3}\,; \\ \;(+\infty) & \big|\; v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \mathrm{K}\,. \end{cases} \tag{35}$$

Beweis: • Schritt 1: *Bestimmung von $f^*(v)$ auf den Facetten von* K. Nach Satz 4.1., 1) und 2) stimmen f^* und f sowohl auf $\operatorname{ext}(\mathrm{K})$ als auch auf dem relativ Inneren von Facetten $\Phi \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_{2,3}$ überein. Für $v \in \operatorname{ri}(\mathrm{W}_5)$ gilt $c = 1$, und nach Satz 4.1., 4) ist $f^*(v) = \big(\,f \,\big|\, (\,\mathrm{W}_5 \cap \{\, v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\big|\; d = \mathit{const.}\,\}\,)\,\big)^c(v)$. Die konvexe Hülle ist also nur bezüglich der Variablen a und b zu bilden, und wir erhalten wiederum $f^*(v) = a+b+c+\big(\,1-d^2\,\big)$. Ebenso schließt man für $v \in \operatorname{ri}(\mathrm{W}_6)$. Nach Satz 4.1., 3) hat man für $v \in \operatorname{ri}(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{F}_{2,1}$, die konvexe Hülle von f bezüglich der Variablen c und d zu bilden; hierfür gilt $\big(\,c + \big(\,1 - d^2\,\big)\,\big)^c = c + \big(\,1 - d^2\,\big)^c = c$. Ebenso schließt man mit Satz 4.1., 4) für $\Phi \in \mathfrak{F}_{3,1} \cup \mathfrak{F}_{3,2}$. Für $v \in \operatorname{ri}(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{F}_{2,2}$, hat man die konvexe Hülle bezüglich der Variablen a und b zu bilden, während wegen $d = \pm 1$ von vornherein $\big(\,1 - d^2\,\big) = 0$ gilt. Für $\Phi \in \mathfrak{F}_{3,3}$ kommt man mit Satz 4.1., 4) zum gleichen Ergebnis.

• **Schritt 2:** *Bestimmung von* $f^*(v)$ *auf* $\operatorname{int}(\mathrm{K})$ *und* $\mathbb{R}^{2\times 2}\setminus \mathrm{K}$. Wir wählen $v_0 \in \operatorname{int}(\mathrm{K})$. Dann erhalten wir wegen Lemma 2.5., 1) für $f^*(v_0)$:

$$f^*(v_0) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\!\!\int_{-1}^{1}\Big(a_0 + \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(t) + b_0 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}(t) + c_0 + \frac{\partial x_2}{\partial t_1}(t) + \Big(1 - \big(d_0 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}(t)\big)^2\Big)\Big)\, dt_1\, dt_2 \;\Big|$$
$$x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\infty}(\Omega)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K}\;\; (\forall)\, t \in \Omega\,\Big\} \tag{36.1}$$
$$= a_0 + b_0 + c_0 \;+\; \inf\Big\{\, \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\!\!\int_{-1}^{1}\Big(1 - \big(d_0 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}(t)\big)^2\Big)\, dt_1\, dt_2 \;\Big|$$
$$x \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\infty}(\Omega)\,,\; v + Jx(t) \in \mathrm{K}\;\; (\forall)\, t \in \Omega\,\Big\}\,. \tag{36.2}$$

Wenn man eine Funktion $x_2 \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{\infty}(\Omega)$ finden kann, die für fast alle $t \in \Omega$ die Bedingungen

$$-1 - c_0 \;\leqslant\; \frac{\partial x_2}{\partial t_1}(t) \;\leqslant\; 1 - c_0 \;\;\text{und}\;\; \frac{\partial x_2}{\partial t_2}(t) \in \{\, -1 - d_0\,,\, 1 - d_0\,\} \tag{37}$$

erfüllt, so wird das Infimum mit Null angenommen (man setzt außerdem $x_1(t) \equiv 0$). Dazu betrachten wir wiederum eine Pyramide $\mathrm{C} \subset \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche $\mathrm{G} = \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_4 \subset \Omega$ und Spitze P_5, so daß die Strecken $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3$ und $\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4$ parallel zur t_1-Achse bzw. zur t_2-Achse liegen. Im senkrechten Schnitt $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(\mathrm{P}_5\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3) = 1 - c_0\,,\;\; \tan\sphericalangle(\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_5) = -1 - c_0\,; \tag{38}$$

im senkrechten Schnitt $\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4\,\mathrm{P}_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(\mathrm{P}_5\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4) = 1 - d_0\,,\;\; \tan\sphericalangle(\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4\,\mathrm{P}_5) = -1 - d_0\,. \tag{39}$$

Ausgehend von C kann nun wie im Beweis zu Satz 4.1., 3) eine Funktion x_2 mit den gesuchten Eigenschaften konstruiert werden. Also besitzt $f^*(v)$ auf $\operatorname{int}(\mathrm{K})$ die behauptete Darstellung. Schließlich erhalten wir mit Satz 2.10., 3) $f^*(v) = (+\infty)$ für alle $v \in \mathbb{R}^{2\times 2}\setminus \mathrm{K}$. ∎

Offensichtlich ist die Funktion $f^* \big|\, \mathrm{K}$ oberhalbstetig. Außerdem ist f^* nicht Rang-1-konvex, denn beispielsweise ist $f^*(v) = f(v) = a + b + c + \big(1 - d^2\big)$ entlang der Kantenstrecke $\mathrm{S}_1 \in \mathfrak{F}_1$ streng konkav (Satz 4.3., 1)). $\mathrm{S}_1 = \{\, \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \} + (1-\lambda)\cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \} \;\big|\; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\,\}$ ist jedoch eine Rang-1-Richtung.

Satz 4.4. (f^* stimmt nicht mit $f^{\#}$ überein): *Es gibt eine Folge von Funktionen* $\{\, x^N \,\}$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\infty}(\Omega)$ *mit* $x^N \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^2_\infty(\Omega)}\, \hat{x}$, $Jx^N \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{L^4_\infty(\Omega)}\, J\hat{x}$, $Jx^N(t) \in \mathrm{K}$ $(\forall)\, t \in \Omega$ *und*

$$\int_\Omega f^*(\, J\hat{x}(t)\,)\, dt \;>\; \liminf_{N\to\infty} \int_\Omega f^*(\, Jx^N(t)\,)\, dt\,. \tag{40}$$

Beweis: Wir betrachten zwei Pyramiden $\mathrm{C}_1 \subset \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche $\mathrm{G}_1 = \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_4 \subset \Omega$ und Spitze P_5 sowie $\mathrm{C}_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche $\mathrm{G}_2 = \mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_2\,\mathrm{Q}_3\,\mathrm{Q}_4 \subset \Omega$ und Spitze Q_5, so daß die Strecken $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3$ und $\mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_3$ parallel zur t_1-Achse und die Strecken $\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4$ und $\mathrm{Q}_2\,\mathrm{Q}_4$ parallel zur t_2-Achse liegen. Im senkrechten Schnitt $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(\mathrm{P}_5\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3) = 1\,,\;\; \tan\sphericalangle(\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_5) = -1\,; \tag{41}$$

im senkrechten Schnitt $\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4\,\mathrm{P}_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(\mathrm{P}_5\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4) = 1\,,\;\; \tan\sphericalangle(\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4\,\mathrm{P}_5) = -1\,; \tag{42}$$

im senkrechten Schnitt $Q_1\,Q_3\,Q_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(Q_5\,Q_1\,Q_3) = 1\,,\ \tan\sphericalangle(Q_1\,Q_3\,Q_5) = -1\,; \tag{43}$$

im senkrechten Schnitt $Q_2\,Q_4\,Q_5$ gelte:

$$\tan\sphericalangle(Q_5\,Q_2\,Q_4) = 1/2\,,\ \tan\sphericalangle(Q_2\,Q_4\,Q_5) = -1/2\,. \tag{44}$$

Ausgehend von C_1 und C_2 konstruieren wir nun wie im Beweis zu Satz 4.1., 3) Funktionen $\hat{x}_1,\,\hat{x}_2 \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\Omega)$. Für die Vektorfunktion $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^{\mathrm{T}}$ gilt: $J\hat{x}(t) \in S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_{13} \cup S_{14} \cup S_{17} \cup S_{18}$ $(\forall)\,t \in \Omega$. Weiterhin erklären wir Funktionen

$$x^N \;=\; \frac{N-1}{N}\cdot\hat{x} \;\in\; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\infty(\Omega)\,; \tag{45}$$

für diese gilt sowohl $x^N \xrightarrow{*}{}^{L^2_\infty(\Omega)} \hat{x}$ als auch $Jx^N \xrightarrow{*}{}^{L^4_\infty(\Omega)} J\hat{x}$ und $Jx^N(t) \in \operatorname{int}(K)$ $(\forall)\,t \in \Omega\ \forall\,N \in \mathbb{N}$. Schließlich ergibt sich mit Satz 4.3.:

$$f^*(\,J\hat{x}(t)\,) = \frac{\partial\hat{x}_1}{\partial t_1}(t) + \frac{\partial\hat{x}_1}{\partial t_2}(t) + \frac{\partial\hat{x}_2}{\partial t_1}(t) + 1 - \Big(\frac{\partial\hat{x}_2}{\partial t_2}(t)\Big)^2\ (\forall)\,t \in \Omega \implies \int_\Omega f^*(\,J\hat{x}(t)\,)\,dt \;=\; \frac{3}{4}\,|\,\Omega\,|\,; \tag{46.1}$$

$$f^*(\,Jx^N(t)\,) = \frac{\partial\hat{x}_1}{\partial t_1}(t) + \frac{\partial\hat{x}_1}{\partial t_2}(t) + \frac{\partial\hat{x}_2}{\partial t_1}(t)\ (\forall)\,t \in \Omega \implies \int_\Omega f^*(\,Jx^N(t)\,)\,dt = 0 \quad \forall\,N \in \mathbb{N}\,. \tag{46.2}$$

Zusammen folgt:

$$\int_\Omega f^*(\,J\hat{x}(t)\,)\,dt \;>\; \liminf_{N\to\infty}\int_\Omega f^*(\,Jx^N(t)\,)\,dt\,, \tag{47}$$

und f^* gemäß Satz 4.3. ist nicht die gesuchte Relaxation $f^\#$ von f aus Definition 4.2.

Literaturverzeichnis.

[1] Andrejewa, J. A.; Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. Teil I.* Z. Angew. Math. Mech. **64** (1984), 35 – 44

[2] Andrejewa, J. A.; Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. Teil II.* Z. Angew. Math. Mech. **64** (1984), 147 – 153

[3] Bourbaki, N.: *Éléments de Mathématique. Livre VI: Intégration, Chap. I – IV.* Hermann; Paris 1952

[4] Carathéodory, C.: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Chelsea; New York 1968 [3]

[5] Carlier, G.; Lachand-Robert, T.: *Régularité des solutions d'un problème variationnel sous contrainte de convexité.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), 79 – 83

[6] Cesari, L.: *Optimization with partial differential equations in Dieudonné-Rashevsky form and conjugate problems.* Arch. Rat. Mech. Anal. **33** (1969), 339 – 357

[7] Dacorogna, B.: *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Springer; Berlin - ... 1989

[8] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial case.* Acta Mathematica **178** (1997), 1 – 37

[9] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *Implicit Partial Differential Equations.* Birkhäuser; Boston - Basel - Berlin 1999

[10] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis, Band 2.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1975

[11] Ekeland, I.; Témam, R.: *Convex Analysis and Variational Problems.* SIAM; Philadelphia 1999 [2]

[12] Evans, L. C.; Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press; Boca Raton - ... 1992

[13] Ioffe, A. D.; Tichomirov, V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1979

[14] Kinderlehrer, D.; Pedregal, P.: *Characterizations of Young measures generated by gradients.* Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991), 329 – 365

[15] Kruskal, J. B.: *Two convex counterexamples: A discontinuous envelope function and a nondifferentiable nearest-point mapping.* Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 697 – 703

[16] Lachand-Robert, T.; Peletier, M. A.: *Minimisation de fonctionnelles dans un ensemble de fonctions convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), 851 – 855

[17] Lachand-Robert, T.; Peletier, M. A.: *An example of non-convex minimization and an application to Newton's problem of the body of least resistance.* Ann. Inst. H. Poincaré — Analyse non linéaire **18** (2001), 179 – 198

[18] Pickenhain, S.: *Beiträge zur Theorie mehrdimensionaler verallgemeinerter Steuerungsprobleme.* Habilitationsschrift, Universität Leipzig 1991

[19] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Critical points in relaxed deposit problems.* In: Ioffe, A.; Reich, S.; Shafrir, I. (Eds.): Calculus of Variations and Optimal Control, Technion 98, Vol. II (Research Notes in Mathematics, Vol. 411). Chapman & Hall / CRC Press; Boca Raton, ... 1999, 217 – 236

[20] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Pontryagin principle for state-constrained control problems governed by a first-order PDE system.* JOTA **107** (2000), 297 – 330

[21] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Piecewise continuous controls in Dieudonné-Rashevsky type problems.* BTU Cottbus, Preprint M-05/2002. Erscheint in: JOTA.

[22] Sauer, E.: *Schub und Torsion bei elastischen prismatischen Balken.* Verlag Wilhelm Ernst & Sohn; Berlin - München 1980 (Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt 29)

[23] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory.* Cambridge University Press; Cambridge 1993

[24] Schulz, K.; Schwartz, B.: *Finite extensions of convex functions.* Math. Operationsforschung Statist., Ser. Optimization **10** (1979), 501 – 509

[25] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars.* J. Math. Mech. **19** (1969), 531 – 551

[26] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion problem III.* Arch. Rat. Mech. Anal. **34** (1969), 228 – 244

[27] Wagner, M.: *Pontryagin's maximum principle for Dieudonné-Rashevsky type problems involving Lipschitz functions.* Optimization **46** (1999), 165 – 184

[28] Wagner, M.: *Quasiconvex relaxation of Dieudonné-Rashevsky type problems.* In Vorbereitung.

Zuletzt geändert: 17. Dezember 2004

Anschrift des Verfassers: Marcus Wagner, BTU Cottbus, Institut für Mathematik, Karl-Marx-Str. 17, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus. e-mail: wagner@math.tu-cottbus.de

Erratum.

Im Beweis zu Satz 4.1., 3), p. 10, nach Formel (28), müssen bei der Bildung der konvexen Hüllfunktion auf einer zweidimensionalen Facette nicht zwei, sondern drei Punkte in allgemeiner Lage berücksichtigt werden. Die Konstruktion der gewünschten Funktion x muß daher mit Hilfe eines Tetraeders anstelle der angegebenen Pyramide ausgeführt werden.

Korrektur zum Beweis von Satz 4.1., 3): Wir betrachten eine Facette $\varPhi \in \mathfrak{F}_{2,1} \cup \mathfrak{F}_{2,2}$; o. E. d. A. sei $\varPhi = \mathrm{Q}_1$ und $v_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{ri}\,(\mathrm{Q}_1)$. Nach Satz 2.10., 1) kommen bei der Bildung von $f^*(v_0)$ ausschließlich die Werte von f auf $\varPhi$ in Betracht, und wie im vorigen Schritt ist $x_1(t) \equiv \mathfrak{o}$:

$$f^*(v_0) \;=\; \inf\Big\{\, \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,1,\,1,\,c_0 + \frac{\partial x}{\partial t_1}(t),\, d_0 + \frac{\partial x}{\partial t_2}(t)\,)\,dt \;\Big|\; x \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\Omega)\,,\; -1 - c_0 \leqslant \frac{\partial x}{\partial t_1}(t) \leqslant 1 - c_0\,, \\ -1 - d_0 \leqslant \frac{\partial x}{\partial t_2}(t) \leqslant 1 - d_0 \;\; (\forall)\, t \in \Omega \,\Big\}\,. \tag{48}$$

Nach Satz 2.11., 2) gilt $f^c(v_0) \leqslant f^*(v_0)$, und nach Satz 2.4., 2) finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ c_3 & d_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Q}_1$, die o. E. d. A. von v_0 verschieden und affin unabhängig sind sowie Zahlen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in (\,0\,,\,1\,)$ mit

$$f^c(v_0) \;\leqslant\; \lambda_1\, f(1,1,c_1,d_1) \;+\; \lambda_2\, f(1,1,c_2,d_2) \;+\; \lambda_3\, f(1,1,c_3,d_3) \;\leqslant\; f^c(v_0) + \varepsilon \quad \text{sowie} \tag{49.1}$$

$$\lambda_1\,(c_1 - c_0) + \lambda_2\,(c_2 - c_0) + \lambda_3\,(c_3 - c_0) = 0\,, \tag{49.2}$$

$$\lambda_1\,(d_1 - d_0) + \lambda_2\,(d_2 - d_0) + \lambda_3\,(d_3 - d_0) = 0\,, \tag{49.3}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\,. \tag{49.4}$$

Nun betrachten wir das Tetraeder $\mathrm{C} \subset \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$\mathrm{P}_1 = \begin{vmatrix} c_1 - c_0 & c_1 - c_2 \\ d_1 - d_0 & d_1 - d_2 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -(d_1 - d_2) \\ c_1 - c_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}_2 = \begin{vmatrix} c_2 - c_0 & c_2 - c_3 \\ d_2 - d_0 & d_2 - d_3 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -(d_2 - d_3) \\ c_2 - c_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{P}_3 = \begin{vmatrix} c_3 - c_0 & c_3 - c_1 \\ d_3 - d_0 & d_3 - d_1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -(d_3 - d_1) \\ c_3 - c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Für seine Seitenflächen gilt:

$$\mathrm{F}_1 \;=\; \mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_4 \;\subset\; \Big\{ \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{11}\,(c_1 - c_0) + \mu_{12}\,(d_1 - d_0) \end{pmatrix} \;\Big|\; \mu_{11}\,,\; \mu_{12} \in \mathbb{R} \,\Big\} + \mathrm{P}_4\,, \\ \mathrm{F}_2 \;=\; \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_4 \;\subset\; \Big\{ \begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{21}\,(c_2 - c_0) + \mu_{22}\,(d_2 - d_0) \end{pmatrix} \;\Big|\; \mu_{21}\,,\; \mu_{22} \in \mathbb{R} \,\Big\} + \mathrm{P}_4\,, \\ \mathrm{F}_3 \;=\; \mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_4 \;\subset\; \Big\{ \begin{pmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \\ \mu_{31}\,(c_3 - c_0) + \mu_{32}\,(d_3 - d_0) \end{pmatrix} \;\Big|\; \mu_{31}\,,\; \mu_{32} \in \mathbb{R} \,\Big\} + \mathrm{P}_4\,; \tag{51}$$

und die Inhalte ihrer Projektionen $\mathrm{F}'_1 = \mathfrak{o}\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_1$, $\mathrm{F}'_2 = \mathfrak{o}\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2$ und $\mathrm{F}'_3 = \mathfrak{o}\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3$ auf die Grundfläche $\mathrm{G} = \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3$ stehen im Verhältnis

$$\big|\,\mathrm{F}'_1\,\big| : \big|\,\mathrm{F}'_2\,\big| : \big|\,\mathrm{F}'_3\,\big| \;=\; \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3\,. \tag{52}$$

Nun bilden wir die Familie $\mathfrak{G}$ aller zu C homothetischen Tetraeder, deren Grundflächen ganz in Ω liegen. Nach dem Überdeckungssatz von Vitali ([9], p. 231 f., Corollary 10.6.) existiert für $\mathrm{int}\,(\Omega)$ eine höchstens abzählbare Überdeckung mit paarweise disjunkten Grundflächen G_1, G_2, ... $\subseteq \mathrm{int}\,(\Omega)$ derartiger Tetraeder, so daß $\big|\,\mathrm{int}\,(\Omega) \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \mathrm{G}_i\,\big| = 0$ gilt. Indem wir über jeder Grundfläche G_i den Mantel des Tetraeders C_i mit

dem Graphen einer Funktion x identifizieren und auf der Nullmenge $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{G}_i\ x(t) = 0$ setzen, erhalten wir eine Funktion, die bei der Bildung des Infimums $f^*(v_0)$ zulässig ist, und für diese Funktion gilt:

$$\begin{aligned} f^c(v_0) \leqslant f^*(v_0) \leqslant \frac{1}{|\,\Omega\,|} \int_\Omega f(\,1,\,1,\,c_0 + \frac{\partial x}{\partial t_1}(t),\,d_0 + \frac{\partial x}{\partial t_2}(t)\,)\,dt \\ = \lambda_1\, f(1,1,c_1,d_1) + \lambda_2\, f(1,1,c_2,d_2) + \lambda_3\, f(1,1,c_3,d_3) \leqslant f^c(v_0) + \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Zusammen folgt: $f^*(v_0) = f^c(v_0) = (\,f \,\big|\, \mathrm{Q}_1\,)^c(v_0)$. Für andere Facetten $\varPhi \in \mathfrak{F}_{2,1} \cup \mathfrak{F}_{2,2}$ schließt man ebenso.
■

Erratum zuletzt geändert: 27. Mai 2005