



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Bildentrauschung und Kantenerkennung
mit L^p -Regularisierung und
Gradientenbeschränkung bei
Graustufenbildern

Diplomarbeit

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

vorgelegt von
Marzena Magdalene Franek

Betreuer:
Prof. Dr. Helmut Maurer
PD Dr. Marcus Wagner

Münster, Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Bildstörungen	6
2.1. Entstehung von Bildstörungen	6
2.2. Klassifikation der Fehlerarten	7
2.2.1. Das Gauss'sche Rauschen	7
2.2.2. Impulsrauschen	8
2.2.3. Verzerrung	9
2.3. Das Fehlermodell	10
2.4. Das Bildmodell	11
2.4.1. Das kontinuierliche Modell	11
2.4.2. Das diskrete Modell	11
3. Mathematische Grundlagen für das Variationsproblem	14
3.1. Funktionenräume	14
3.1.1. Einführung in die Sobolev-Räume	14
3.1.2. Funktionenräume in der Bildverarbeitung	17
3.2. Variationsrechnung	19
3.2.1. Existenzsätze	20
3.2.2. Optimalitätsbedingungen	21
4. Bildwiederherstellung mit Hilfe des Variationsansatzes	24
4.1. Variationsansatz zur Entrauschung	24
4.2. Regularisierungsfunktionen	26
4.2.1. Theorie: Die Regularisierungsfunktion	26
4.2.2. Quadratische Regularisierung	27
4.2.3. TV-Regularisierung	29
4.3. Bildwiederherstellung und Kantenerkennung	34
4.3.1. Das Mumford-Shah-Funktional	34
4.3.2. Das Ambrosio-Tortorelli-Funktional	34
5. Bildwiederherstellung als mehrdimensionales Steuerungsproblem	36
5.1. Das Pontrjaginsche Maximumprinzip für Dieudonné-Rashevsky-Probleme	36
5.2. Mehrdimensionale Steuerungsprobleme in der Anwendung: Bildwie- derherstellung	38
6. Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme	40
6.1. Direkte Verfahren	40

6.2. Indirekte Verfahren	43
6.2.1. Gradientenabstiegsverfahren	43
6.2.2. Fixpunkt-Iteration	43
6.3. Duale Ansätze	44
6.3.1. Die primal-duale Lösungsmethode	44
6.3.2. Duale Lösungsmethode	45
6.4. Anwendung von Innere-Punkt-Verfahren zur numerischen Lösung nicht- linearer Optimierungsprobleme	46
6.4.1. Nichtlineare Optimierungsprobleme	46
6.4.2. Innere-Punkt-Verfahren	48
6.4.3. AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming)	49
6.4.4. IPOPT (Interior Point OPTimizer)	49
7. Versuchsreihen und Ergebnisse	50
7.1. Bewertungsmöglichkeiten	50
7.1.1. Bewertung der Bildqualität	50
7.1.2. Bewertung des Kantenbildes	51
7.2. Versuchsreihen	54
7.2.1. 1.Versuchsreihe: AT-Versuchsreihe	56
7.2.2. 3.Versuchsreihe: SB-Versuchsreihe	62
7.2.3. 2.+ 4.Versuchsreihe: L^p -Regularisierung und Steuerbeschrän- kung	67
7.2.4. TV-Versuchsreihe	70
7.3. Diskussion der Ergebnisse	74
8. Auswertung und Zusammenfassung der Ergebnisse	76
A. Programme	77
B. Versuchstabellen	80
Abbildungsverzeichnis	93
Literaturverzeichnis	95
Eidesstattliche Erklärung	98