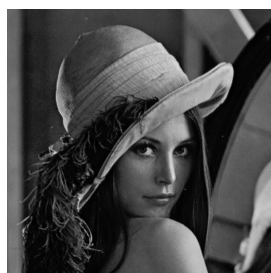
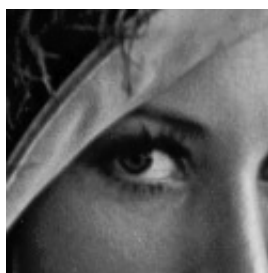


# 1 Einleitung

Die digitale Bildverarbeitung (engl.: Image processing) beschäftigt sich mit grundlegenden Verfahren zur Bearbeitung und Aufbereitung von Bildern. Aufgrund zahlreicher Anwendungsgebiete, dem wissenschaftlichen Interesse an diesem noch relativ jungen Forschungsbereich und der zunehmenden Leistungsstärke des Computers, haben sich die Verfahren der Bildverarbeitung in den letzten zehn Jahren etabliert und verbessert. Themen wie Bildentrauschung, Segmentierung und Bildrekonstruktion sind aus Bereichen wie z.B. der Nanotechnologie, der Sensorik und der medizinischen Bildgebung nicht mehr wegzudenken. Zu einem weiteren bedeutsamen Anwendungsgebiet zählt die Fernerkundung der Erde und des Universums, welche durch militärische Interessen motiviert wurde, und deren Bilder und Erkenntnisse auch in der Meteorologie, der Ozeanographie und der Astronomie genutzt werden. Die aus diesen unterschiedlichen Aufnahmequellen erhaltenen Bildinformationen können bearbeitet und manipuliert werden. Zu den wichtigsten Verfahren zählen die Restaurierung, Entzerrung, Entrauschung, Bildkompression und Kantenerkennung. In der vorliegenden Arbeit wird das klassische Problem der Entrauschung (engl.: Denoising) und der Kantenextraktion bei Graustufenbildern betrachtet. Diese Aufgaben zählen zu den wichtigsten und bedeutendsten in der Bildverarbeitung. Wieso ist eine Bildentrauschung und Kantendetektion so wichtig? Es kommt bei der Aufzeichnung, aber auch bei der Übertragung von Bildern häufig zu ungewollten Störungen, die das Bild verfälschen und Bildinformationen löschen. Das Entfernen



(a) Lena-Testbild (aus [31])



(b) Ausschnitt des Lena-Bildes



(c) mit Gauss'schem Rauschen gestört

Abbildung 1.1: Lena-Testbilder

der Bildstörungen ist nun ein Versuch, die Bildinformationen an den gestörten Stellen mit Hilfe der Informationen aus den umliegenden Pixeln wiederherzustellen. Bei der Modellierung eines effizienten Entrauschalgorithmus ist jedoch nicht nur der Aspekt der Rauschentfernung wichtig, sondern auch die Kantenerhaltung, Erkennung und Extraktion. Diese eng miteinander verknüpften Aufgaben sind bei einer

Entrauschung des Bildes deswegen so bedeutend, weil Bildkanten entscheidende Informationsträger sind.

Zur Modellierung eines Entrauschalgorithmus benötigen wir mathematische Hilfsmittel. Klassisch wurde die Bildverarbeitung - als Teil der Signalverarbeitung - über die Fourier- und Spektralanalyse aufgebaut. In den letzten Jahren sind weitere Hilfsmittel wie z.B. Wavelets, stochastische Ansätze, Variationsansätze und lineare oder nichtlineare partielle Differentialgleichungen hinzugekommen. Grundlage dieser Arbeit ist der Variationsansatz. Ein Lösungsverfahren zur Bildwiederherstellung basierend auf einem Variationsansatz hat zum Ziel, durch Minimierung eines Energiefunktional der Form

$$J(x) := \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + \lambda \int_{\Omega} \Phi(|\nabla x(s)|) ds$$

aus einem gestörten Eingangsbild  $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein möglichst ungestörtes Ausgangsbild  $x : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zu berechnen. Die Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wird im Allgemeinen konvex gewählt und hat Einfluss auf die Glattheit des Bildes. Falls eine Lösung des Minimierungsproblems existiert, so werden wir sie im Sobolev-Raum oder im Raum der beschränkten Totalvariation suchen.

Der Variationsansatz zur Bildwiederherstellung ist in den letzten Jahren vielfach erforscht worden, und es wurden zahlreiche mathematische Modelle und Verfahren entwickelt. Was bislang noch nicht untersucht wurde, ist die Einführung einer Gradientenbeschränkung.

Eine Beschränkung des Gradienten des Bildes  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kann folgendermaßen formuliert werden:

$$|\nabla f(s)| \leq R \quad (\forall) s \in \Omega.$$

Die Konstante  $R$  bestimmt dabei den Grad der Beschränkung. Aus einem mehrdimensionalen Variationsproblem ergibt sich durch die Einführung einer Gradientenbeschränkung ein Steuerungsproblem vom Dieudonné-Rashevsky-Typ:

$$\text{Minimiere } J(x, u) = \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + \lambda \int_{\Omega} \Phi(|u(s)|) ds,$$

$$\nabla x(s) = u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega,$$

$$u(s) \in K = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -R^q \leq (v_1)^q + (v_2)^q \leq R^q\} \quad (\forall) s \in \Omega,$$

mit  $(x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}) \times L^p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $1 < p < \infty$  und  $\lambda > 0$ .

Die Menge  $K \subset \mathbb{R}^2$  ist konvex und kompakt, und der Gradient des Bildes verbleibt in einem  $q$ -Normkörper. Probleme dieser Art wurden bisher noch nicht untersucht. Es wurden jedoch schon numerische Berechnungen für das duale Problem von DEWESS/HELBIG durchgeführt (vgl. [14]).

In dieser Diplomarbeit wird diskutiert, welche Auswirkungen eine Steuerbeschränkung auf das zu glättende Bild hat, und inwieweit wir die optimale Steuerung als Kantendetektor verwenden können. Um die erhaltenen Resultate, dazu zählen die

wiederhergestellten Bilder und die zugehörigen Kantenbilder, in Relation setzen zu können, betrachten wir zusätzlich das Ambrosio-Tortorelli-Kantenerkennungsfunktional (vgl. [4]):

$$J_\epsilon(x, k) := c_1 \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + c_2 \int_{\Omega} |\nabla x(s)|^p (k(s)^2 + c_4) ds \\ + c_3 \int_{\Omega} \left( \epsilon |\nabla k(s)|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (k(s) - 1)^2 \right) ds.$$

Das Funktional ist für eine gute Bildentrauschung und Kantenerkennung bekannt. Die Kantenskizze des Bildes fließt als zusätzliche Optimierungsvariable  $k$  in den Minimierungsprozess ein. Daher ist eine gleichzeitige Entrauschung und Kantenerkennung möglich.

Bei der Untersuchung des Steuerungsproblems und dem Vergleich mit den Resultaten des Ambrosio-Tortorelli-Funktional stellte sich heraus, dass eine Gradientenbeschränkung sowohl positive als auch negative Auswirkungen auf das Bild hat. Die Beschränkung des Bildgradienten bewirkt grundsätzlich eine Glättung des Bildes. Das Ausmaß der Glättung ist jedoch abhängig von der Stärke der Beschränkung. Bei einer „starken“ Beschränkung wird das Bild mehr geglättet als bei einer „schwachen“ Steuerbeschränkung. An den zugehörigen Kantenbildern können wir diese Erkenntnisse ebenfalls beobachten. Überglättete breite Kanten sind auf eine „starke“ Beschränkung zurückzuführen. Im Gegensatz dazu sind dünne, helle Kanten Folge einer „schwachen“ Beschränkung. Wir werden im Kapitel 7 erläutern, was wir unter einer „starken“ und einer „schwachen“ Steuerbeschränkung verstehen, und für welche Werte wir optimale Ergebnisse erhalten.

Obwohl eine Glättung des Bildes erkennbar ist, benötigen wir dennoch neben einer Gradientenbeschränkung eine Regularisierung, um Rauschen aus dem Bild, falls wir von einem gestörten Bild ausgehen, zu entfernen. Eine Gradientenbeschränkung allein ist nicht in der Lage Rauschpunkte effizient genug zu entfernen.

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir mit einer Steuerbeschränkung die Kantenschärfe und die Stärke der Regularisierung beeinflussen können. Ferner hat sich herausgestellt, dass die zugehörigen Kantenbilder kleine Kantendetails aufweisen, die wir mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional nicht erhalten können. Hier ist der Vorteil einer zusätzlichen Steuerbeschränkung zu erkennen.

## Gliederung

Die vorliegende Diplomarbeit gliedert sich in sieben Kapitel.

Beginnen werden wir mit einem Überblick und einer Einführung in die Problematik der Bildaufnahme und der Bildstörungen. Um mit Bildern arbeiten zu können, werden wir dann die Begriffe eines diskreten und kontinuierlichen Bildmodells einführen.

Das *dritte Kapitel* beschäftigt sich mit der Frage, in welchem Funktionenraum wir unser wiederhergestelltes Bild suchen wollen. Für das eingeführte Variationsproblem werden wir dann grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitsätze sowie Optimalitätsbedingungen formulieren.

Im nächsten Kapitel, dem *vierten Kapitel*, wird die Bildwiederherstellung mit Hilfe des Variationsansatzes erläutert. Wir orientieren uns dazu an dem Buch von AUBERT/ KORNPROBST (vgl. [3]). Zusätzlich werden unterschiedliche Regularisierungsfunktionen und ihre Auswirkungen auf das Bild untersucht. Des Weiteren werden wir das Kantenerkennungsfunktional von AMBROSIO/TORTORELLI (vgl. [2]) erläutern.

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das optimale Steuerungsproblem werden anschließend im *fünften Kapitel* formuliert. Bei der Einführung mehrdimensionaler Variationsprobleme orientieren wir uns an der Habilitationsschrift von WAGNER [29] bzw. an seinem Preprint [30].

Im *sechsten Kapitel* werden numerische Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme besprochen. Wir werden dabei zwischen den direkten und den indirekten Verfahren unterscheiden, und diese auf das ROF-Modell anwenden. Wir orientieren uns bei den direkten Lösungsverfahren an der Dissertation von THEISSEN [25].

Im *siebten Kapitel* werden wir einige Versuchsergebnisse präsentieren. Neben den Versuchen mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional werden Versuche mit variierenden Steuerbeschränkungen und unterschiedlichen Regularisierungsfunktionen aufgeführt. Wir bewerten die Ergebnisse mit Hilfe eines SNR-Wertes.

Die aussagekräftigsten Versuchstabellen und die notwendigen AMPL-Programme sind im Anhang zu finden. Alle Versuchsreihen, d.h. die vollständigen Versuchstabellen, Bilder und Programme befinden sich auf der beigefügten CD.

### **Bemerkungen**

Um die Vor- und Nachteile einzelner Methoden zur Entrauschung und Kantendetektion zu untersuchen, werden wir eine Reihe unterschiedlicher Testbilder benutzen. Darunter ist eines der bekanntesten, nämlich das Lena-Testbild (vgl. Abbildung 1.1). Dieses Bild besteht aus großen, homogenen Flächen, aber auch aus vielen Regionen, die kleine Details enthalten. Aus diesem Grund ist das Bild zur Untersuchung eines Bild-Entrauschalgorithmus sehr gut geeignet. Das Lena-Testbild als Grauwertbild ist auf der folgenden Seite zu finden:

<http://www.am.uni-duesseldorf.de/~witsch/html/lehre/sonder-WS06.html>

Wir verwenden zusätzlich ein Flugzeug-Testbild (vgl. Abbildung ??), welches auf folgender Seite zu finden ist:

<http://sipi.usc.edu/database/database.cgi?volume=misc>

Zur Lösung der Steuerungs- und Optimierungsprobleme werden wir direkte Verfahren benutzen, d.h. wir werden das Problem zuerst diskretisieren, bevor wir einen Optimierungs-Solver, in dieser Arbeit hauptsächlich IPOPT, darauf anwenden. Ein Interface zwischen Matlab und AMPL wird uns dabei helfen, die Bildverarbeitung und die Optimierung miteinander zu verknüpfen. AMPL/IPOPT hat mit großen Datenmengen numerische Schwierigkeiten. Daher werden wir in den Versuchsreihen kleinere Ausschnitte der Testbilder verwenden. Weitere Erläuterungen zu den Programmen finden sich im Anhang bzw. auf der beigefügten CD.

### **Dank**

Ich danke herzlich Prof. Dr. Helmut Maurer für die interessante Aufgabenstellung und lehrreiche Betreuung. Im Weiteren möchte ich Dr. Marcus Wagner von der

Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus meinen Dank aussprechen, dass er stets als Ansprechpartner zur Verfügung stand und meine Arbeit mit Anregungen und Vorschlägen bereicherte. So haben sich in zahlreichen Diskussionen hilfreiche Denkanstöße ergeben. Außerdem möchte ich mich bei meinen Kommilitonen Lucas Franek und Christoph Brune für die fachliche Unterstützung und die inspirierenden Gespräche bedanken. Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich während meines Studiums begleitet und unterstützt hat.