1 Einleitung

Motivation

In dieser Arbeit wollen wir optimale Steuerungsprobleme mit L^∞-Steuerbeschränkung untersuchen und mit ihrer Hilfe zwei Grundprobleme der Bildverarbeitung behandeln. Wir setzen uns zum Ziel, ein verrauschtes Bild zu entrauschen und außerdem die Kanten oder Objektgrenzen der Bildobjekte zu extrahieren. Diese beiden Probleme sind in der Bildverarbeitung unter dem Namen image-restoration-Problem bzw. image-segmentation-Problem bekannt.
Das erste Problem, d.h. die Bildwiederherstellung oder -entrauschung, dient in der Praxis oft als Vorverarbeitungsschritt, um die Qualität eines Bildes zu verbessern. Dieser ist notwendig, da Bilder oft in einer gestörten Form vorkommen, wobei Bildstörungen auf vielfältige Weise entstehen können. Zum Beispiel entstehen gestörte Satellitenbilder durch atmosphärisches Rauschen, verzerrte Bilder, wenn sich Kamera und Objekt relativ zu einander bewegen. Selbst moderne Digitalkameras können bei schlechten Lichtverhältnissen verrauschte Bilder produzieren, sodass auf die Bildentrauschung trotz technischem Fortschritt nicht immer verzichtet werden kann.
Es gibt sehr viele unterschiedliche Ansätze, um das Bild zu entrauschen und seine Qualität somit in einem gewissen Sinne zu verbessern (vgl. [7]). In dieser Arbeit beschäftigen wir uns vor allem mit dem Variationsansatz zur Lösung dieses Problems. Der Variationsansatz basiert auf der Minimierung eines jeweils geeigneten Energiefunktionals und hat die Verbesserung der Bildqualität zum Ziel. Bezeichnet $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ das gestörte und $x : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ das gesuchte Bild, so hat das Energiefunktional die folgende Gestalt:

$$F(x) = \int_\Omega (I(s) - S(x(s)))^2 ds + \mu \int_\Omega f(|\nabla x(s)|)ds, \; x \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.1}$$

Funktionale dieser Gestalt sind im Bereich der Bildverarbeitung schon seit etwa 20 Jahren Gegenstand der Forschung und somit bereits gut untersucht. Der Ansatz in dieser Arbeit besteht nun darin, eine Steuerung zu erklären und im Zusammenhang mit diesen Funktionalen und einer Steuerbeschränkung zu betrachten. Wir erhalten also ein Problem der optimalen Steuerung, was laut Kenntnisstand des Verfassers in Verbindung mit dem image-restoration- und image-segmentation-Problem noch nicht untersucht wurde. Wir führen also zunächst eine künstliche Steuerung $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein, indem wir sie durch

$$u(s) = (u_1(s), u_2(s))^T := \nabla x(s) \tag{1.2}$$

erklären. Wir betrachten dann Beschränkungen der $\|\cdot\|_q$-Norm von u und erhalten somit insgesamt das folgende Steuerungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & F(x,u) = \int_\Omega (I(s) - S(x(s)))^2 ds + \mu \int_\Omega f(|u(s)|)ds, \\ & (x,u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ \text{unter } & u(s) = (u_1(s), u_2(s))^T = \nabla x(s), \\ & u(s) \in K := \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 | -R^q \le v_1^q + v_2^q \le R^q\right\} \; (\forall) s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dieses Steuerungsproblem ist ein Problem vom Dieudonné-Rashevsky-Typ. Notwendige Optimalitätsbedingungen für Probleme dieser Gestalt wurden von Wagner [31, 32] entwickelt und liefern somit das theoretische Fundament für diese Probleme.
Motiviert wird die Definition der Steuerung (1.2) durch das zweite Grundproblem der Bildverarbeitung, das in dieser Arbeit behandelt wird. Wir setzen uns zum Ziel, neben der Bildwiederherstellung die Kanten des Bildes zu bestimmen, behandeln also das image-segmentation-Problem. Um dieses Ziel zu erreichen, reicht es nicht aus, das Funktional (1.1) zu betrachten. Um ein Kantenbild $k : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu erhalten, wurden aus diesem Grund komplexere Energiefunktionale entwickelt. Ein Ansatz, der von Ambrosio/Tortorelli [2] vorgeschlagen wurde, besteht darin, für ein festes $\epsilon > 0$ und die Parameter c_1, c_2, c_3, c_4 das folgende Funktional zu minimieren:

$$\begin{aligned} F_\epsilon(x,k) =& c_1 \int_\Omega (x(s) - I(s))^2 \, ds + c_2 \int_\Omega |\nabla x(s)|^2 \cdot (k(s)^2 + c_4) ds \\ &+ c_3 \int_\Omega \left(\epsilon \, |\nabla k(s)|^2 + \frac{1}{4\epsilon}(k(s) - 1)^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Dieses liefert nach Minimierung und geeigneter Parameterwahl ein wiederhergestelltes Bild x und ein Kantenbild k. Wir werden dieses Funktional nutzen, um die dort erhaltenen Kantenbilder mit den Kantenbildern zu vergleichen, die wir durch das Lösen des optimalen Steuerungsproblems (1.3) erhalten. Dabei besteht die Idee grundsätzlich darin, Kantenbilder mit Hilfe der optimalen Steuerung zu definieren. Da wir gerade die Steuerung durch den Bildgradienten definieren und dieser eine große Steigung an Kanten aufweist, enthält er Kanteninformationen, die wir nutzen wollen. Wir erhalten somit durch die Lösung des Steuerungsproblems ein Verfahren, das ein wiederhergestelltes Bild und ein Kantenbild liefert. Je nachdem, welche Art von Steuerbeschränkung wir wählen, erhalten wir auch unterschiedliche Kantenbilder. Insbesondere untersuchen wir in den Versuchsreihen den Fall $q = \infty$, also die Beschränkung der Maximumsnorm von u.
Bei der Untersuchung des Steuerungsproblems und der Durchführung vielfältiger Versuchsreihen werden wir darauf stoßen, dass Steuerungsprobleme insbesondere bei Salt-and-Pepper-Rauschen sinnvoll eingesetzt werden können. Wir werden ein neues Verfahren entwickeln, das es ermöglicht, synthetische Bilder mit einer geringen Rauschintensität zu entrauschen, ohne dabei Kanten zu zerstören. Dabei werden wir unser Verfahren mit einigen Verfahren aus der aktuellen Forschung vergleichen, die in den letzten Jahren unter anderem von Nikolova [22] und Bar/Kiryati/Sochen [5] entwickelt wurden.
In dieser Arbeit lösen wir die Variations- und Steuerungsprobleme mit Hilfe von direkten Verfahren, d.h. wir diskretisieren die Probleme zuerst und wenden anschließend einen Optimierungssolver an. Dieses Verfahren wurde von Theissen [26] für optimale Steuerprozesse mit partiellen Differentialgleichungs-Restriktionen erfolgreich angewandt. Dabei wurden in [26] semilineare elliptische und parabolische Differentialgleichungen in den Nebenbedingungen untersucht, während die Nebenbedingungen in dieser Arbeit partielle Differentialgleichungen erster Ordnung sind.
In der Literatur werden im Gegensatz zu den direkten Verfahren oft die indirekten Verfahren zur Lösung der Probleme beschrieben. Wir wollen untersuchen, ob wir auch mit Hilfe der direkten Verfahren gute Ergebnisse bei Problemen der Bildverarbeitung erzielen, und unser Vorgehen teilweise auch mit den indirekten Verfahren vergleichen.

Aufbau

In Kapitel 2 werden wir einige Grundlagen der mathematischen Bildverarbeitung, die wir in den darauf folgenden Kapiteln benötigen werden, zusammenstellen. In Kapitel 3 fassen wir die Grundlagen der Theorie der Variationsrechnung sowie der optimalen Steuerungsprobleme zusammen. Anschließend werden wir in Kapitel 4 diese Theorie verwenden, um den Variationsansatz für das image-restoration-Problem herzuleiten. Weiterhin modellieren wir eine Lösung des Problems mit Hilfe von optimalen Steuerungsproblemen. Wir entwickeln ein neues Verfahren – das „Steuerungsproblem mit rotating mask“ – mit dessen Hilfe wir kontrolliertes Salt-and-Pepper-Rauschen eliminieren können. Wir stellen die Methoden vor, die wir als Vergleichsverfahren nutzen werden. In Kapitel 5 behandeln wir die numerische Lösung der Variations- und Steuerungsprobleme. Anschließend stellen wir in Kapitel 6 die Versuchsreihen zusammen, die wir zu den unterschiedlichen Methoden durchgeführt haben. Wir diskutieren die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Ansätze. Zuletzt werden wir in Kapitel 7 das Vorgehen dieser Arbeit kurz zusammenfassen und die wichtigsten Resultate dieser Arbeit wiederholen, sowie einen Ausblick auf offene Probleme liefern.
Literatur zur modernen mathematischen Bildverarbeitung ist vor allem in englischer Sprache verfügbar, sodass einige englische Begriffe des spezifischen Vokabulars nur inadäquat ins Deutsche übersetzt werden können. Häufig werden in dieser Arbeit die englischen Bezeichnungen daher in Klammern mit angegeben oder gar ausschließlich benutzt.
Bis auf das in der Bildverarbeitung bekannte Lena-Testbild wurden sämtliche Bilder und Abbildungen vom Verfasser mit Hilfe von MATLAB erstellt.