Priv.-Doz. Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung "Optimierung mit Lipschitzfunktionen" (FS 2008)

Arbeitsblatt: Limes superior von Zahlenfolgen und Funktionen

1. Zahlenfolgen

• **Definition:** Gegeben sei eine beschränkte Zahlenfolge $\{ a_N \}$. Dann erklären wir

$$\limsup_{N\to\infty} a_N = \inf \big\{ \xi \;\big|\; a_N < \xi \text{ für alle } N \in \mathbb{N} \text{ mit Ausnahme endlich vieler} \big\} .$$

• **Realisierung:** Ist $\{ a_N \}$ eine beschränkte Zahlenfolge, so existiert eine konvergente Teilfolge $\{ a_{N'} \} \subseteq \{ a_N \}$ mit

$$\lim_{N'\to\infty} a_{N'} = \limsup_{N\to\infty} a_N ,$$

und für jede andere konvergente Teilfolge $\{ a_{N''} \} \subseteq \{ a_N \}$ gilt

$$\lim_{N''\to\infty} a_{N''} \leqslant \limsup_{N\to\infty} a_N .$$

• **Berechnung:** Ist $\{ a_N \}$ eine beschränkte Zahlenfolge, so gilt:

$$\limsup_{N\to\infty} a_N = \inf_{N \geqslant 1} \sup_{K \geqslant N} a_K .$$

2. Funktionen

• **Definition:** Gegeben sei eine beschränkte Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit abgeschlossenem Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann erklären wir für $x \in \Omega$

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \sup \big\{ \limsup_{N\to\infty} f(y_N) \;\big|\; \{ y_N \} , \Omega \to x \big\} .$$

• **Realisierung:** Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit abgeschlossenem Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x \in \Omega$, so existiert eine Folge $\{ z_N \} , \Omega \to x$ mit

$$\lim_{N\to\infty} f(z_N) = \limsup_{y\to x} f(y) ,$$

und für jede andere Folge $\{ y_N \} , \Omega \to x$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} f(y_N) \leqslant \limsup_{y\to x} f(y) .$$

• **Berechnung:** Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit abgeschlossenem Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x \in \Omega$, so gilt:

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{N \geqslant 1} \sup \big\{ f(z) \;\big|\; z \in \Omega \cap \mathrm{K}(x, 1/N) \big\} .$$

Siehe [Carathéodory 1968], pp. 76 ff. und 122 ff.