Priv.-Doz. Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung “Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen” (HS 2006/07)

Arbeitsblatt: Kurven- und Oberflächenintegrale

Wir betrachten PC^1-Jordankurven $\mathcal{C}$ und reguläre Flächenstücke $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{C} = \{\, \varphi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; t \in [\,a\,,\,b\,] \subset \mathbb{R}^1 \,\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, \mathbf{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (\,u,\,v\,) \in [\,a\,,\,b\,] \times [\,c\,,\,d\,] \subset \mathbb{R}^2 \,\}.$$

1. Das Kurvenintegral erster Art

Integration einer skalaren Funktion $f(x,y,z)$ über eine PC^1-Jordankurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds := \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\;dt$$

Anwendungen: Bogenlänge, Gesamtwert einer Größe auf einer dichtebelegten Kurve, Koordinaten des Schwerpunkts, Momente

2. Das Kurvenintegral zweiter Art

Integration eines Vektorfeldes $F(x,y,z) = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\big)^{\mathrm{T}}$ über eine PC^1-Jordankurve $\mathcal{C}$:

$$\int_{\mathcal{C}} F(x,y,z)^{\mathrm{T}}\,ds := \int_a^b \begin{bmatrix} F_1(x(t),y(t),z(t)) \\ F_2(x(t),y(t),z(t)) \\ F_3(x(t),y(t),z(t)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} dt$$

Anwendungen: Fluß eines Vektorfelds um oder durch eine Kurve

3. Das Oberflächenintegral erster Art

Integration einer skalaren Funktion $f(x,y,z)$ über ein reguläres Flächenstück $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\mathcal{F}} f(x,y,z)\,do := \int_a^b \int_c^d f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2}\;dv\,du$$

Anwendungen: Flächeninhalt, Gesamtwert einer Größe auf einer dichtebelegten Fläche, Koordinaten des Schwerpunkts, Momente

4. Das Oberflächenintegral zweiter Art

Integration eines Vektorfeldes $F(x,y,z) = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\big)^{\mathrm{T}}$ über ein reguläres Flächenstück $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\mathcal{F}} F(x,y,z)^{\mathrm{T}}\,do := \int_a^b \int_c^d \begin{bmatrix} F_1(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \\ F_2(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \\ F_3(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \end{bmatrix} dv\,du$$

Anwendungen: Fluß eines Vektorfelds durch eine Fläche