Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung "Konvexe Analysis" (FS 2004)

---

## Testatfragen zur Vorlesung "Konvexe Analysis" (I)

1. Bilde im $\mathbb{R}^2$ die Minkowski-Summe der abgeschlossenen Einheitskugel und des Epigraphen der Funktion $x^2 = f(x^1) = |\, x^1 \,|$.
2. Wie kann ein affiner Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden?
3. Wann heißt eine Punktmenge $\{\, x^0, x^1, \ldots, x^r \,\} \subset \mathbb{R}^n$ affin unabhängig?
4. Definiere: konvexe Menge, konvexer Kegel.
5. Stelle gegenüber: Definitionen und Darstellungssätze für die lineare, affine und konvexe Hülle einer Menge $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.
6. Nenne den Darstellungssatz von Carathéodory.
7. Welche der Eigenschaften "offen", "abgeschlossen", "kompakt" bleiben bei der Bildung der konvexen Hülle erhalten?
8. Was versteht man unter einem relativ inneren Punkt $x$ einer Menge $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n$?
9. Richtig oder falsch? "$\mathrm{C}_1 \subseteq \mathrm{C}_2$ konvex $\Longrightarrow$ $\mathrm{ri}\,(\mathrm{C}_1) \subseteq \mathrm{ri}\,(\mathrm{C}_2)$."
10. Definiere: eigentliche Stützhyperebene H an eine Menge $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.
11. Was besagt der Projektionssatz?
12. Was bedeutet die Aussage: "Die Hyperebene H trennt die Mengen $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ stark"?
13. Nenne den zweiten und dritten Trennungssatz im $\mathbb{R}^n$.
14. Beweise: Jede nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge stimmt mit dem Durchschnitt aller ihrer abgeschlossenen Stützhalbräume überein.
15. Definiere zu $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Polare und zu einem Kegel $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ den Dualkegel.
16. Beweise: $\big(\mathrm{K}(\mathfrak{o}, \varrho)\big)^\circ = \mathrm{K}(\mathfrak{o}^*, \varrho^{-1})$.
17. Welche Darstellungen haben die Menge $(\mathrm{A}^\circ)^\circ$ und der Kegel $(\mathrm{K}^*)^*$?
18. Welcher Trennungssatz gilt für konvexe Kegel $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_r$ mit $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{K}_i = \{\, \mathfrak{o} \,\}$?
19. Formuliere die Lagrangesche Multiplikatorenregel für eine konvexe Optimierungsaufgabe mit Ungleichungs-Nebenbedingungen.
20. Was versteht man unter einem Extremalpunkt einer konvexen Menge?
21. Definiere: Facette F einer konvexen Menge.
22. Was gilt für Facetten F, G von C mit $\mathrm{F} \subsetneqq \mathrm{G}$?
23. Bestimme alle Facetten der Halbkugel $\mathrm{C} = \{\, (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\,,\; z \geqslant 0 \,\}$ und stelle die halbgeordnete Menge $[\,\mathcal{F}\,, \subset\,]$ als Graphen dar.
24. Stelle die Sätze von Minkowski und Krein-Milman gegenüber.
25. Erkläre: planarer Graph.

Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung "Konvexe Analysis" (FS 2004)

---

## Testatfragen zur Vorlesung "Konvexe Analysis" (II)

26. Was versteht man unter dem Netz eines Polytops $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}^n$?
27. Wie lautet die Euler-Poincarésche Relation?
28. Definiere: konvexe Funktion, sublineare Funktion.
29. Beweise, daß der effektive Definitionsbereich einer konvexen Funktion konvex ist.
30. Nenne das Epigraph-Kriterium.
31. Erkläre: konvexe Hüllfunktion $\varphi^c$ einer Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Wie kann $\varphi^c(x)$ dargestellt werden?
32. Nenne die Kriterien für die Konvexität einer reellwertigen Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.
33. Welche Aussagen gelten über die Beschränktheit einer konvexen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$?
34. Warum ist jede lokale Minimalstelle einer konvexen Funktion gleichzeitig globale Minimalstelle?
35. Stelle die analytischen Eigenschaften einer konvexen Funktion $f$ in einem Punkt $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ und dessen Umgebung $\mathrm{K}(x,\varepsilon) \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ zusammen.
36. Definiere: Subdifferential $\partial f(x)$ einer konvexen Funktion.
37. Seien $f^1$, $f^2$ konvex mit $\operatorname{dom}(f^1) \cap \operatorname{dom}(f^2) \neq \emptyset$. Welche Darstellung besitzt $\partial\big(\operatorname{Max}(f^1, f^2)\big)(x)$?
38. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Subdifferential $\partial f(x)$ und der Richtungsableitung $f'(x,h)$ in $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$?
39. Beweise: Ist $f$ konvex, so gilt $\hat{x} \in \operatorname{absmin}(f) \iff \mathfrak{o} \in \partial f(\hat{x})$.
40. Was versteht man unter der LYF-Konjugierten einer Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$? Nenne deren Eigenschaften.
41. Unter welchen Bedingungen tritt in den Ungleichungen $\varphi^{**}(x) \leqslant \varphi^c(x) \leqslant \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ Gleichheit ein?
42. Erkläre: Indikatorfunktion und Stützfunktion einer nichtleeren, konvexen, kompakten Menge $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$.
43. Beschreibe die bijektive Zuordnung zwischen nichtleeren, konvexen, kompakten Mengen und Stützfunktionen.
44. Drücke den Durchmesser von $\mathrm{A} \in \mathcal{K}^n$ mit Hilfe der Stützfunktion aus.
45. Definiere: Stützfunktion in Polarkoordinaten zu $\mathrm{A} \in \mathcal{K}^2$.
46. Seien $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex, kompakt. Wie ist der Hausdorff-Abstand $\mathcal{H}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ erklärt?
47. In welchem Sinne kann eine nichtleere, konvexe, kompakte Menge $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ durch Polytope approximiert werden?
48. Was besagt der Auswahlsatz von Blaschke? Formuliere diesen Satz erneut mit Hilfe von Stützfunktionen.
49. Wie lautet die Ungleichung von Brunn-Minkowski, und wann tritt darin Gleichheit ein?
50. Nenne den schwachen und starken Trennungssatz in unendlichdimensionalen Banachräumen.