Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Seminar "Funktionentheorie" (FS 2000)

Funktionentheorie: Testatfragen (I)

1. Deute Addition, Multiplikation und Division komplexer Zahlen geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene.

2. Erkläre den Unterschied zwischen $\sqrt[3]{8} \in \mathbb{R}$ und $\sqrt[3]{8} \subset \mathbb{C}$.

3. Warum heißt die Gleichung $z^n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_1)$ Kreisteilungsgleichung?

4. Welche Gestalt hat die Lösungsmenge der Gleichung $A\,(z+\overline{z}) + i\,B\,(\overline{z}-z) + C\,(z\,\overline{z}-1) + D\,(z\,\overline{z}+1) = 0$ für A, B, C, $D \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0$?

5. Erkläre die stereographische Projektion der Zahlenkugel auf die komplexe Ebene und nenne die wichtigsten Eigenschaften dieser Abbildung.

6. Warum kann die abgeschlossene komplexe Ebene $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \cup \{\,\infty\,\}$ als kompakter metrischer Raum aufgefaßt werden?

7. Beschreibe die Spiegelung von $z \in \mathbb{C}$ am Kreis $\partial\mathrm{K}(0,R)$.

8. Was ist eine Möbiustransformation?

9. Beweise, daß die Möbiustransformationen mit der Operation der Verkettung eine Gruppe bilden.

10. Gib eine Möbiustransformation an, die die Halbebene $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0 \,\}$ auf den Einheitskreis $\mathrm{K}(0,1)$ abbildet. Ist diese Transformation eindeutig bestimmt?

11. Was ist ein Gebiet?

12. Was versteht man unter der analytischen Landschaft einer komplexen Funktion?

13. Wann heißt eine Funktion $f\colon\ \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ in $z_0 = \infty$ stetig?

14. Definiere den komplexen Differentialquotienten von $f\colon\ \mathrm{U}(z_0) \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathbb{C}$.

15. Sei $f\colon\ \mathrm{U}(z_0) \to \mathbb{C}$ durch $f(x+i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ gegeben. Welchen Bedingungen müssen die reellwertigen Funktionen u und v genügen, wenn f in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist?

16. Erkläre: holomorphe Funktion.

17. Was bedeuten die Symbole $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}(z_0)$ und $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}(z_0)$?

18. Erkläre: konforme Abbildung von $\mathrm{U}(z_0) \subset \mathbb{C}$ auf $\mathrm{V}(w_0) \subset \mathbb{C}$. Erweitere die Definition auf $z_0 = \infty$ bzw. $w_0 = \infty$.

19. Welche Funktionen $f\colon \mathrm{U}(z_0) \to \mathbb{C}$ vermitteln eine in $z_0 \in \mathbb{C}$ konforme Abbildung?

20. Zeige: Für jede Zahl $k \in \mathbb{Z}$ ist die komplexe Exponentialfunktion $2k\pi i$-periodisch.

Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Seminar "Funktionentheorie" (FS 2000)

Funktionentheorie: Testatfragen (II)

21. Was versteht man unter dem komplexen Logarithmus $\operatorname{Log} z$ und seinem Hauptwert $\operatorname{Ln} z$?

22. In welchem Sinne gelten die Logarithmengesetze im Komplexen?

23. Definiere zu $a \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ und $b \in \mathbb{C}$ die komplexe Potenz $\left[a \right]^b$. Bestimme $\left[i \right]^i$.

24. Deute eine komplex differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als komplexes Potential eines Strömungsfeldes und nenne das zugehörige Geschwindigkeitsfeld.

25. Nenne die Potentiale für Quellströmung aus $a \in \mathbb{C}$ bzw. Zirkulationsströmung um $a \in \mathbb{C}$.

26. Definiere das komplexe Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$.

27. Berechne $\displaystyle\oint\limits_{\mathrm{K}(z_0,\varrho)} (z - z_0)^k\, dz$ für $k \in \mathbb{Z}$.

28. Wie können Real- und Imaginärteil des komplexen Kurvenintegrals $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$ physikalisch gedeutet werden?

29. Nenne den Cauchyschen Integralsatz und seine Umkehrung (Satz von Morera).

30. Wann ist $\displaystyle\int_{z_A}^{z_E} f(z)\, dz$ von der Wahl der Verbindungskurve der Punkte $z_A,\ z_E \in \mathbb{C}$ unabhängig?

31. Gib eine Stammfunktion F zu einer holomorphen Funktion $f\colon \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ an.

32. Drücke Funktionswert $f(z_0)$ und Ableitungen $f^{(n)}(z_0)$ einer holomorphen Funktion $f\colon \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ durch Kurvenintegrale aus.

33. Gib die Taylorentwicklung einer in $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktion f zum Aufpunkt $z_0 \in \mathrm{G}$ an.

34. Nenne den Identitätssatz für Potenzreihen.

35. Unter welchen Bedingungen läßt sich eine reelle, auf $(\, a\, ,\, b\,) \subset \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ zu einer holomorphen Funktion $f(z)$ auf $\mathrm{G} \subseteq \mathbb{C}$, $(\, a\, ,\, b\,) \subset \mathrm{G}$, fortsetzen?

Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Seminar "Funktionentheorie" (FS 2000)

Funktionentheorie: Testatfragen (III)

36. Sei $\mathrm{G} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, f in G holomorph und im Abschluß von G (bezüglich $\mathbb{C}_0$) noch stetig mit $M = \sup\limits_{z \in \mathrm{G}} |\, f(z)\,|$. Wo kann $|\, f(z)\,|$ den Wert M annehmen?

37. Gib die Laurententwicklung einer in $\mathrm{G} = \mathrm{K}(z_0, r'') \setminus \mathrm{K}(z_0, r')$ holomorphen Funktion f zum Aufpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ an ($r'' > r'' \geqslant 0$).

38. Wie lautet die Laurententwicklung einer in $\mathrm{G} = \mathbb{C} \setminus \mathrm{K}(0, r)$ holomorphen Funktion bezüglich $z_0 = \infty$?

39. Eine Funktion f sei in $\mathbb{C}$ holomorph mit Ausnahme der Stellen $z_0 = 0$, $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 2 + 2\,i$. Erstelle eine Konvergenzkarte der möglichen Laurententwicklungen um z_1.

40. Klassifiziere die isolierten Singularitäten einer sonst holomorphen Funktion $f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ nach der Gestalt der Laurentreihen.

41. Klassifiziere die isolierten Singularitäten einer sonst holomorphen Funktion $f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ nach dem Verhalten von $|\, f(z)\,|$ in ihrer Umgebung.

42. Formuliere den Satz von Casorati/Weierstraß über das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle.

43. Was versteht man unter dem Residuum einer in $\mathrm{G} \setminus \{\, z_0 \,\}$ holomorphen Funktion f in $z_0 \in \mathbb{C}$ bzw. $z_0 = \infty$?

44. Bestimme $\operatorname*{Res}\limits_{z=(-1)} \sin\Big(\dfrac{z}{z+1}\Big)$.

45. Was besagt der Residuensatz?

46. Beweise: Ist $f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ bis auf endlich viele Stellen $a_k \in \mathbb{C}$ holomorph, so verschwindet die Summe ihrer Residuen in $\mathbb{C}_0$, d. h. $\sum\limits_k \operatorname*{Res}\limits_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0\,.$

47. Nenne die Anzahlformel für Nullstellen und Polstellen einer sonst holomorphen Funktion im Gebiet G.

48. Unter welchen Bedingungen besitzt eine in $\mathrm{K}(z_0, r)$ holomorphe Funktion $w = f(z)$ eine holomorphe Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$?

49. Definiere: meromorphe Funktion.

50. Warum kann eine meromorphe Funktion auf einer kompakten Menge $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ höchstens endlich viele Polstellen besitzen?