Priv.-Doz. Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung "Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen" (HS 2006/07)

Testatfragen zur Vorlesung
"Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen" (I)

Teil A: Anwendungen der Riemannschen Integrationstheorie in Geometrie und Physik

1. Was versteht man unter einer Jordankurve?
2. Wie kann man aus einer Jordanschen Parameterdarstellung von $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ alle weiteren gewinnen?
3. Erkläre: rektifizierbare Jordankurve.
4. Wie kann man die Bogenlänge einer C^1-Jordankurve $\mathcal{C}$ berechnen?
5. Formuliere den Jordanschen Kurvensatz im $\mathbb{R}^2$.
6. Was ist ein reguläres Flächenstück $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$?
7. Wann haben zwei Dreibeine $[\,\boldsymbol{x}',\, \boldsymbol{y}',\, \boldsymbol{z}'\,]$ und $[\,\boldsymbol{x}'',\, \boldsymbol{y}'',\, \boldsymbol{z}''\,]$ die gleiche Orientierung?
8. Gib eine Darstellung der Sphäre $\mathcal{S}$ mit Mittelpunkt p und Radius R in Kugelkoordinaten an und erkläre, warum es sich dabei nicht um eine reguläre Parameterdarstellung handelt.
9. Stelle die Definitionen für das Oberflächenintegral 1. Art $\int_{\mathcal{F}} f(x,y,z)\, do$ und das Oberflächenintegral 2. Art $\int_{\mathcal{F}} F(x,y,z)^{\mathrm{T}} do$ gegenüber.
10. Definiere für Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ das Spatprodukt $[\,\boldsymbol{a}\,,\, \boldsymbol{b}\,,\, \boldsymbol{c}\,]$ und interpretiere es geometrisch.
11. Wann heißt eine Parameterdarstellung des regulären Flächenstücks $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ flächentreu?
12. Wie kann ein Oberflächenintegral 2. Art in ein Oberflächenintegral 1. Art umgeformt werden?
13. Erkläre: Rotation eines Vektorfelds $F\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
14. Wodurch ist ein C^1-Vektorfeld als Gradientenfeld charakterisiert, und was muß man dabei über den Definitionsbereich voraussetzen (zwei Möglichkeiten)?
15. Was versteht man unter einem solenoidalen Vektorfeld $F\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^3$ und seinem Vektorpotential?
16. Nenne den Satz über die Helmholtz-Weyl-Zerlegung eines stetig differenzierbaren Vektorfelds auf einem offenen, beschränkten, konvexen Definitionsbereich.
17. Erkläre: Lipschitzgebiet im strengen Sinne.
18. Nenne die Sektorformel.
19. Wie lautet der Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$?
20. Zeige: Wenn ein Körper die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes erfüllt, so beträgt der Fluß des Vektorfelds $F(x,y,z) = (\,x,\, y,\, z\,)^{\mathrm{T}}$ durch seine Oberfläche das Dreifache seines Volumens.

Priv.-Doz. Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung "Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen" (HS 2006/07)

Testatfragen zur Vorlesung
"Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen" (II)

Teil B: Zwei Erweiterungen des Riemannschen Integralbegriffs

21. Erkläre: Totalvariation einer Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.
22. Beweise, daß jede Lipschitz-stetige Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation ist.
23. Nenne den Darstellungssatz für Funktionen $g \in BV[a, b]$.
24. Welche Gestalt hat eine Riemann-Stieltjes-Zwischensumme $RS(f, g, Z)$?
25. In welcher Beziehung stehen die RS-Integrale $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ und $\int_a^b g(t)\,df(t)$?
26. Nenne zwei hinreichende Bedingungen für die Existenz des RS-Integrals $\int_a^b f(t)\,dg(t)$.
27. Stelle die Summe $\sum_{k=1}^n f(k)$ zu stetigem f als RS-Integral dar.
28. Was versteht man unter einer n-dimensionalen Lebesgueschen Nullmenge?
29. Warum ist die Menge der rationalen Zahlen eine eindimensionale Lebesguesche Nullmenge?
30. Wie lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Riemann-Integrals $R\text{-}\int_a^b f(t)\,dt$?
31. Erkläre: einfache Funktion $f \in T(\Omega)$.
32. Was versteht man unter einer monotonen Approximation für eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$?
33. Wie wird das Lebesguesche Integral für Funktionen aus $T(\Omega)$, $L^+(\Omega)$ bzw. $L(\Omega)$ definiert?
34. Richtig oder falsch? "Mit f und g gehört auch jede Linearkombination von f und g zu $L(\Omega)$."
35. Richtig oder falsch? "Mit f und g gehört auch das Produkt $f \cdot g$ zu $L(\Omega)$."
36. Was besagt der Konvergenzsatz von Beppo Levi?
37. Wie lautet der Konvergenzsatz von Lebesgue?
38. Wie ist die Zahl $\liminf_{n\to\infty} a_n$ definiert?
39. Nenne ein Beispiel für eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht Riemann-, aber Lebesgue-integrierbar ist.
40. Gib ein uneigentliches Integral an, das zwar im Riemannschen, aber nicht im Lebesgueschen Sinne existiert.

Priv.-Doz. Dr. Marcus Wagner
BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Lehrstuhl Optimierung
Vorlesung "Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen" (HS 2006/07)

Testatfragen zur Vorlesung
"Analysis III: Integration und Gewöhnliche Differentialgleichungen" (III)

Teil C: Gewöhnliche Differentialgleichungen

41. Erkläre: allgemeine Lösung einer gewöhnlichen DGl. n-ter Ordnung.
42. Erkläre: Anfangswertproblem und Randwertproblem.
43. Wie kann man eine in expliziter Form gegebene gewöhnliche DGl. n-ter Ordnung in ein System von DGl.en erster Ordnung umformen?
44. Was versteht man unter dem Richtungsfeld der DGl. $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$?
45. Wie lautet das Vektorfeld der Phasengeschwindigkeit für eine autonome DGl. n-ter Ordnung?
46. Beschreibe die Methode der Variation der Konstanten für eine inhomogene lineare DGl. erster Ordnung.
47. Gib die allgemeine Form der Bernoullischen und Riccatischen DGl. an.
48. Was versteht man unter einer exakten DGl., und wie kann man sie lösen?
49. Was ist eine DGl. mit getrennten Variablen, und wie kann man sie lösen?
50. Erläutere das Eulersche Polygonzugverfahren. Unter welchen Voraussetzungen und in welchem Sinne konvergiert das Verfahren?
51. Wann heißt eine Funktionenfolge $\{ x_N \}$, $C^0[a, b]$ gleichgradig stetig?
52. Nenne den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (auch die Fassung für Systeme von DGl.en 1. Ordnung).
53. Stelle die Methoden für den Beweis der Existenzsätze von Peano und Picard-Lindelöf gegenüber.
54. Wie spiegelt sich die Abhängigkeit eines AWP's von einem Parameter μ in der Lösung wider?
55. Wann heißt eine endliche oder unendliche Menge von Funktionen $\mathcal{M} \subset C^0[a, b]$ linear unabhängig?
56. Was versteht man unter der Wronski-Determinante $W(t)$ der Menge $\{ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \} \subset C^{n-1}[a, b]$?
57. Welche Struktur hat die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGl. n-ter Ordnung?

Fragen 58 – 60: Lineare DGl.en n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

58. Welche Funktionen kommen für einfache bzw. r-fache reelle Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms ins Fundamentalsystem?
59. Welche Funktionen kommen für ein einfaches bzw. r-faches Paar $a \pm i\,b$ konjugiert-komplexer Nullstellen des charakteristischen Polynoms ins Fundamentalsystem?
60. Auf der rechten Seite der inhomogenen Gl. stehe ein Quasipolynom. Welchen Ansatz muß man für eine partikuläre Lösung machen?